Zur Existenz globaler klassischer Lösungen des Anfangswertproblems der Stellardynamik

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ernst Horst

aus Lardenbach

1979

eingereicht im Dezember MCMLXXVIII

Zur Existenz globaler klassischer Lösungen des Anfangswertproblems der Stellardynamik

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ernst Horst

aus Lardenbach

eingereicht im Dezember MCMLXXVIII

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Referent: Prof. J. Batt
Korreferent: Prof. E. Wienholtz
Tag der mündlichen Prüfung: 23.2.79

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 5

§1 Definitionen und Hilfsätze 13

§2 Die Anfangswertprobleme P^{ε} ($\varepsilon \geq 0$) und einige Eigenschaften ihrer Lösungen 24

§3 Schranken für Φ_{ρ} und verwandte Fragen, Erhaltungssätze 31

§4 Lipschitzstetigkeit von $\Phi_{\rho}(t,.)$ und $E(t,.)$ 49

§5 Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ 57

§6 Schranken, die nicht von ε abhängen Der allgemeine Fall 65

§7 Der kugelsymmetrische Fall 67

§8 Der rotationssymmetrische Fall 78

Verzeichnis wichtiger Definitionen 89

Literaturverzeichnis 91

Einleitung

In der Stellardynamik betrachtet man folgendes Anfangswert=problem:

Gegeben sei ein differenzierbares, nichtnegatives $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^6)$.

Gesucht wird eine differenzierbare, nichtnegative Funktion $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ derart, daß

(i) $\Phi(0,.) = \varphi$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t,x) + x_v \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi(t,x) + E(t,x_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_v} \Phi(t,x) = 0 \quad (*)$

mit $E(t,x_s) = \int \gamma \cdot |x_s - y_s|^{-3} \cdot (x_s - y_s) \cdot \Phi_\rho(t,y_s)\, dy_s^3$

und $\Phi_\rho(t,y_s) = \int \Phi(t,y)\, dy_v^3$

Dabei schreiben wir ein Element x des "Phasenraums" $\mathbb{R}^6$ als Paar $x = (x_s, x_v)$ mit $x_s, x_v \in \mathbb{R}^3$ (space, velocity).

Die Erhaltungsgleichung (*) beschreibt die zeitliche Ent=wicklung eines Sternensystems unter dem Einfluß der von ihm selbst erzeugten Gravitationskraft E. Für eine meßbare Teilmenge S von $\mathbb{R}^6$ gibt das Integral von $\Phi(t,.)$ über S an, wie groß die Masse der Sterne ist, für die zur Zeit t das Paar (x_s, x_v) von Orts- und Geschwindigkeitsvektor in S liegt.

Die Anfangsbedingung (i) legt den Zustand des Systems zur Zeit t = 0 fest. $\Phi_\rho(t,.)$ ist die Dichte im "Ortsraum" $\mathbb{R}^3$, und γ ist eine Gravitationskonstante, die wir nach geeig=neter Wahl der Einheit der Masse als -1 annehmen können.

Dieses Anfangswertproblem wird seit langem in der Stellar= dynamik verwendet (vgl. z.B. Jeans (1919) p.230ff.), aber seine mathematische Behandlung ist noch nicht abgeschlossen. Insbesondere gibt es noch keine vollständige Theorie der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Eine Einführung in den physikalischen Zusammenhang findet man in Ch.V des Buchs von Kurth (1957), das auch die für die Mathematik wichtigen Aspekte berücksichtigt.

Setzt man $\gamma = +1$, so wird E eine abstoßende Kraft und die Gleichung (*) beschreibt Erscheinungen, die in der Plasma= physik auftreten (vgl. Vlasov (1961)).

Das Problem ist nichtlinear, weil der Koeffizient E der Differentialgleichung für die gesuchte Funktion Φ selbst wieder von ihr abhängt.

Der erste Existenz- und Eindeutigkeitssatz wurde von Kurth (1951) bewiesen. Kurth zeigte die Existenz "lokaler" Lösungen, d.h. von Lösungen, die auf $I \times \mathbb{R}^6$, I ein Intervall, definiert sind. Die Existenz "globaler" Lösungen, d.h. von Lösungen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$ blieb offen. Weitere lokale Existenz= sätze stammen von Arsen'ev (1975b), Wollman (1977) und Ukai-Okabe (1978).

Batt (1963a) ersetzte $\Phi_\rho(t,.)$ in der Definition von $E(t,.)$ durch das arithmetische Mittel über eine Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ und bewies die Existenz von eindeutigen globalen Lösungen des so modifizierten Problems.

Neunzert (1975) verallgemeinerte die Ergebnisse von Batt. Er bewies einen globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz in einer sehr allgemeinen Situation, indem er das Problem durch eine Folge von diskreten Problemen approximierte, die jeweils zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen äquivalent sind. Das nicht modifizierte Anfangswertproblem der Stellardynamik ist aber nicht in dieser Theorie enthalten.

Der erste globale Existenzsatz im nicht modifizierten Fall stammt von Arsen'ev (1975a). (Der Autor betrachtete ein etwas allgemeineres Problem, das aber die Gleichung (*) als Spezialfall enthält.) Dort wird nur der Fall $\gamma = +1$ behandelt, $\gamma = -1$ erfordert zusätzliche Überlegungen, die man in §3 der vorliegenden Arbeit findet, läßt sich dann aber völlig analog durchführen. Besonders wichtig ist, daß in dieser Arbeit erstmalig der "Energiesatz" zum Beweis von Existenzaussagen verwendet wird. Arsen'ev zeigte aber nur die Existenz einer beschränkten integrierbaren Funktion Φ, die die Gleichung (*) - grob gesagt - im Distributionssinn erfüllt. Der Beweis ist nicht konstruktiv und liefert auch keine Eindeutigkeitsaussage. Es bleibt offen, ob sich "gute" Eigenschaften von φ wie z.B. Differenzierbarkeit auf Φ übertragen.

Aus diesem Grund liegt diese Arbeit etwas abseits des Weges, den wir zur Behandlung des Problems gewählt haben. Auch Arsen'ev selbst hat in der bereits erwähnten Arbeit (1975b) die klassischen Lösungen mit ganz anderen Methoden untersucht und konnte auch nur lokale Existenz zeigen.

In dem Fall, daß $\varphi(x_s,x_v) = \varphi(S(x_s),S(x_v))$ für j e d e Drehung S des $\mathbb{R}^3$ (Kugelsymmetrie), zeigte schließlich Batt (1977) die Existenz und Eindeutigkeit von globalen klassischen Lösungen. Dabei betrachtete er nur den Fall $\gamma = -1$, der Beweis für $\gamma = +1$ verläuft aber völlig analog.

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Kugelsymmetrie ist die Rotationssymmetrie: Es gelte $\varphi(x_s,x_v) = \varphi(Z_\vartheta(x_s),Z_\vartheta(x_v))$ für $0 \leq \vartheta \leq 2.\pi$. Dabei ist Z_ϑ die Drehung um eine f e s t e Achse im $\mathbb{R}^3$, die wir o.B.d.A. als dritte Koordinatenachse annehmen, mit Drehwinkel ϑ. Diese Bedingung spielt eine wichtige Rolle in der vorliegenden Arbeit, sie geht aber erst ganz am Schluß ein. Der Großteil der Überlegungen erfordert keine Symmetrievoraussetzung.

Wir behandeln das Anfangswertproblem der Stellardynamik in folgendem allgemeinen Rahmen:

Sei $N \in \mathbb{N}$, $\gamma = \pm 1$, $\varepsilon \geq 0$,

$e^\varepsilon(x_s) := \gamma.(|x_s|^2 + \varepsilon)^{-N/2}.x_s$ für $x_s \in \mathbb{R}^N$.

$\varphi: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ und $K: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mögen geeignete Integrier= barkeits-, Beschränktheits- und Lipschitzbedingungen erfüllen.

Die Schar von Anfangswertproblemen P^ε ($\varepsilon \geq 0$) wird wie folgt definiert:

Gesucht wird ein nicht triviales Intervall I mit $0 \in I$ und eine Funktion $\Phi^\varepsilon: I\times\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ derart, daß

(i) $\Phi^\varepsilon(0,.) = \varphi$

(ii) Für $t \in I$, $x_s \in \mathbb{R}^N$ gilt

$(y \mapsto e^\varepsilon(x_s - y_s)\Phi^\varepsilon(t,y)) \in L^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N)$. E^ε ist stetig und auf jedem Streifen $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^N$ mit $\alpha,\beta \in I$ ist $E^\varepsilon(t,x_s)$ beschränkt und erfüllt eine Lipschitzbedingung bezüglich x_s, dabei sei

$$E^\varepsilon(t,x_s) := E_o^\varepsilon(t,x_s) + K(t,x_s)$$

$$E_o^\varepsilon(t,x_s) := \int e^\varepsilon(x_s - y_s).\Phi_\rho^\varepsilon(t,y)\, dy_s^N$$

$$\Phi_\rho^\varepsilon(t,y_s) := \int \Phi^\varepsilon(t,y)\, dy_v^N$$

(iii) Φ^ε ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\dot{X}_s(t) = X_v(t),\ \dot{X}_v(t) = E^\varepsilon(t,X_s(t)) \quad t \in I \qquad (**)$$

Der Lösungsbegriff wurde so gewählt, daß aus zusätzlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die vorgegebenen Funktionen φ und K sofort die stetige Differenzierbarkeit von Φ^ε und das Erfülltsein der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi^\varepsilon(t,x) + x_v \cdot \frac{\partial}{\partial x_s}\Phi^\varepsilon(t,x) + E^\varepsilon(t,x_s).\frac{\partial}{\partial x_v}\Phi^\varepsilon(t,x) = 0$$

folgt.

Deshalb bezeichnen wir Lösungen in diesem Sinne auch als "klassische" Lösungen (im Gegensatz zu "schwachen" Lösungen). Wichtig ist vor allem die Bedingung (ii), die sicherstellt, daß die "charakteristische Differentialgleichung" (**) eindeutige Lösungen auf ganz I hat. Die Beschränktheit von E^ε ist dabei mehr eine technische Voraussetzung, die aber stets erfüllt ist, wenn wir die Lipschitzstetigkeit von E^ε nachweisen können.

Das Anfangswertproblem der Stellardynamik ist offenbar der Fall $N = 3$, $\varepsilon = 0$, $\varphi \geq 0$. K ist eine "äußere Kraft" , die man sich z.B. im plasmaphysikalischen Fall $\gamma = +1$ als von einem fest vorgegebenen Ionenhintergrund erzeugt vorstellen kann.

Unser Hauptinteresse gilt P^0. Die Anfangswertprobleme P^ε ($\varepsilon>0$) dienen dazu, P^0 durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zu lösen. Die spezielle Wahl der Approximation erfolgte so, daß P^ε für $\varepsilon > 0$ nur die "guten" aber nicht die "schlechten" Eigenschaften von P^0 hat. Die Existenz eindeutiger globaler Lösungen von P^ε für $\varepsilon > 0$ folgt aus der Arbeit von Neunzert (1975), ließe sich aber auch mit den Methoden von Horst (1975) zeigen. Zudem existieren für P^ε für $\varepsilon > 0$ erprobte numerische Verfahren, die das Problem auch einer Behandlung mit Rechenmaschinen zugänglich machen. (Vgl. Wick (1974), Neunzert (1975), Hannoschöck-Rautmann (1976), Kürschner (1977).)

In der vorliegenden Arbeit gehen wir wie folgt vor:
Wir zeigen die Existenz einer eindeutigen Lösung Φ^0 von P^0 auf dem Intervall I, vorausgesetzt die globalen Lösungen Φ^ε von P^ε ($\varepsilon>0$) erfüllen folgende Bedingung:

Für jedes kompakte Teilintervall I_1 von I ist

$$\sup \{ \int |\Phi^\varepsilon(t,x)| \, dx_v^N \mid \varepsilon > 0,\ t \in I_1,\ x_s \in \mathbb{R}^N \} < \infty. \qquad (***)$$

Wichtig zum Nachweis, daß (***) erfüllt ist, oder nicht erfüllt sein kann, aber auch von eigenem Interesse, sind Aussagen über gewisse Momente der Funktionen Φ^ε. Wir beweisen Analoga der

klassischen Sätze der Mechanik über Impuls, Schwerpunkt, Drehimpuls und Trägheitsmoment.

Wir zeigen, daß folgende Aussagen über die Bedingung (***) unter geeigneten Voraussetzungen an K gültig sind.

(i) Ist $N = 1$ oder $N = 2$, so gilt (***) für $I = \mathbb{R}$, ist $N \geq 3$, so gilt (***) für $I =]-T,S[$ mit geeigneten $T,S > 0$.

(ii) Ist $N = 3$ und φ kugelsymmetrisch, so gilt (***) für $I = \mathbb{R}$. Unter zusätzlichen Voraussetzungen bleibt diese Aussage für $N = 4$ richtig.

(iii) Ist $N = 3$ und $\varphi \geq 0$ rotationssymmetrisch, und gibt es ein $\delta > 0$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x_1 \cdot x_5 - x_2 \cdot x_4| \leq \delta$, so gilt (***) für $I = \mathbb{R}$.

Hauptergebnis der Arbeit ist der aus (iii) folgende globale Existenzsatz im für die Anwendungen wichtigen Fall $N = 3$. Dabei kann man $x_1 \cdot x_5 - x_2 \cdot x_4$ als Projektion des "Drehimpulses" $x_s \times x_v$ auf die Symmetrieachse interpretieren.

Wir zeigen mit Gegenbeispielen (dabei ist immer $K \equiv 0$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, $\varphi \geq 0$), daß es für $N \geq 4$ lokale Lösungen von P^o gibt, die sich nicht zu globalen Lösungen fortsetzen lassen. Insonderheit kann in einem solchen Fall also nicht (***) für $I = \mathbb{R}$ erfüllt sein. Ist $N = 4$, so gibt es eine Anfangsdichte φ derart, daß P^o für $\gamma = +1$ eine globale, hingegen für $\gamma = -1$ nur eine lokale Lösung besitzt.

Wir beenden die Einleitung mit weiteren Angaben zur Literatur:

Die aus (i) folgenden globalen Existenzsätze für N = 1,2 sind im wesentlichen bereits bekannt. Man vergleiche für N = 1 Batt (1963b), Iordanskiĭ (1964) und Wollman (1977), für N = 2 Wollman (1978) und Ukai-Okabe (1978).

Verallgemeinerungen von P°, die auch magnetische Kräfte berücksichtigen, findet man im Buch von Vlasov (1961). Relativistische Probleme behandelten z.B. Weibel (1967) und Rautmann (1968).

Stationäre Lösungen, d.h. Lösungen, die nicht von der Zeit t abhängen, untersuchten Kurth (1955a) und Neunzert (1965).

Kurth (1978) gibt ein explizites Beispiel einer verallgemeinerten Lösung von P° an, die allerdings unstetig und unbeschränkt ist.

Zu erwähnen ist noch, daß der Beweis des globalen Existenzsatzes für N = 3 von Chaljub-Simon (1974) fehlerhaft ist. (vgl. Batt (1976))

Weitere Literaturangaben - auch zu verwandten Fragestellungen - sind im Literaturverzeichnis enthalten.

Prof. J. Batt hat die vorliegende Arbeit angeregt und betreut, Prof. E. Wienholtz übernahm das Korreferat. Ihnen sowie Dr. P. Dierolf und Dr. J. Voigt sei für viele Gespräche und Anregungen gedankt.

§1 Definitionen und Hilfssätze

In diesem Abschnitt vereinbaren wir später verwendete Bezeichnungen und beweisen einige Lemmata. Diese sind entweder von allgemeiner Natur und werden in verschiedenen Situationen angewandt, oder ihr Beweis würde an der Stelle, wo sie benötigt werden, die Argumentation zu sehr unterbrechen. Es empfiehlt sich, diesen Abschnitt relativ schnell zu lesen und dann gegebenenfalls später zurückzublättern.

(1.1) Bezeichnungen und Konventionen:

$N \in \mathbb{N}$ $(= \{1,2,3,\ldots\})$ ist die räumliche Dimension des betrachteten Modells.

Ist $x \in \mathbb{R}^{2N}$, so schreiben wir $x = (x_s, x_v)$ mit $x_s, x_v \in \mathbb{R}^N$.
(Wir identifizieren $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^Q$ immer mit $\mathbb{R}^{M+Q}$.)
Analog sei $F = (F_s, F_v)$ für jede $\mathbb{R}^{2N}$-wertige Funktion F.

Für $z,w \in \mathbb{R}^M$ ist $zw = z.w = z_1 w_1 + \ldots + z_M w_M$, $z^2 = z.z$, $|z| = z z^{1/2}$.

$\mathbb{R}_o^+ := [0,\infty[$

$\omega_N := 2.\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$

Für $I \subset \mathbb{R}$ sei $C_+(I) := \{f: I \to \mathbb{R}_o^+ \mid f$ ist stetig, auf $I \cap [0,\infty[$ monoton nicht fallend, auf $I \cap]-\infty,0]$ monoton nicht wachsend$\}$.

Alle Integrale werden bezüglich des Lebesguemaßes dx^M auf meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^M$ gebildet. Ein Integral ohne Angabe des Integrationsbereichs erstreckt sich immer über den ganzen Grundraum $\mathbb{R}^M$.

$L^p(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) := \{f:\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^Q \mid f \text{ meßbar}, |f| \in L^p(\mathbb{R}^M)\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Wir setzen für jedes M und Q $\|f\|_p := \||f|\|_p$.

$C^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) := \{f:\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^Q \mid f \text{ ist k-mal stetig differenzierbar}\}$

$C_b^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) := \{f \in C^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) \mid f$ und alle Ableitungen der Ordnung $\leq k$ von f sind beschränkt$\}$

$C_c^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) := \{f \in C^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) \mid \text{supp}(f)$ ist kompakt$\}$

$C^k(\mathbb{R}^M) := C^k(\mathbb{R}^M,\mathbb{R})$, analog $C_b^k(\mathbb{R}^M)$ und $C_c^k(\mathbb{R}^M)$

Ist k = 0, so lassen wir den oberen Index k weg.

$Lip(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^Q) := \{f:\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^Q \mid \text{lip}(f) < \infty\}$, $Lip(\mathbb{R}^M) := Lip(\mathbb{R}^M,\mathbb{R})$

mit $\text{lip}(f) := \sup_{\substack{z,w\in\mathbb{R}^M \\ z\neq w}} |z-w|^{-1}|f(z) - f(w)|$

(1.2) Lemma: Seien $t_o,t_1 \in \mathbb{R}$, $t_o < t_1$.

$F:[t_o,t_1[\times\mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}_o^+$ sei stetig und es gelte

$F(t,r) \geq F(t,r')$ für $r \geq r'$

Sei $f_o \in \mathbb{R}_o^+$, $T \in]t_o,t_1]$. Im Intervall $I := [t_o,T[$ sei

$g:I \to \mathbb{R}_o^+$ die maximale Lösung von

$g'(t) = F(t,g(t))$, $g(t_o) = f_o$

$f:I \to \mathbb{R}_o^+$ sei meßbar und lokal beschränkt und es gelte für $t \in I$

$$f(t) \leq f_o + \int_{t_o}^{t} F(r,f(r))\,dr.$$

Dann ist $f(t) \leq g(t)$ für $t \in I$.

Beweis: Ist f stetig, so handelt es sich um einen Spezialfall von Beesack (1975), theorem 4.1. Ist f nicht stetig, so setze man

$$h(t) := f_o + \int_{t_o}^{t} F(r,f(r))\,dr.$$ h ist stetig und es gilt

$$h(t) \leq f_o + \int_{t_o}^{t} F(r,h(r))\,dr.$$ Es folgt $f(t) \leq h(t) \leq g(t)$. //

(1.3) Lemma: Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und μ ein positives Maß auf X.

(i) Es sei E ein metrischer Raum und $(x,z) \mapsto f(x,z)$ eine Abbildung von $X \times E$ nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ und $z_0 \in E$. Ferner gelte:

1. Für jedes $z \in E$ ist $x \mapsto f(x,z)$ integrierbar.
2. Für fast alle $x \in X$ ist die Funktion $z \mapsto f(x,z)$ stetig in z_0
3. Es gibt eine integrierbare Funktion $g \geq 0$ derart, daß für jedes $z \in E$ fast überall auf X $|f(x,z)| \leq g(x)$ ist.

Dann ist $h(z) := \int f(x,z)\, d\mu(x)$ stetig in z_0.

(ii) Ist überdies $E \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und genügt f den folgenden Bedingungen:

4. Für fast alle $x \in X$ ist die Funktion $z \mapsto f(x,z)$ endlich und besitzt eine Ableitung $D_2 f(x,z)$.
5. Es gibt eine integrierbare Funktion $g_1 \geq 0$ derart, daß für jedes $z \in E$ fast überall auf X $|D_2 f(x,z)| \leq g_1(x)$ ist.

Dann ist h in jedem $z \in E$ differenzierbar und

$$h'(z) = \int D_2 f(x,z)\, d\mu(x).$$

Beweis: Dieudonné (1970) p. 125 //

(1.4) Lemma und Definition: Sei $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $0 \leq \alpha < N$ und, falls $\alpha > 0$ ist, $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt

$I(N,\alpha,\sigma,z) := \int |z-w|^{-\alpha} |\sigma(w)| dw^N$ läßt sich wie folgt abschätzen:

(i) $I(N,0,\sigma,z) \leq \|\sigma\|_1$

(ii) $I(N,\alpha,\sigma,z) \leq J(N,\alpha).\|\sigma\|_\infty^{\alpha/N}.\|\sigma\|_1^{1-\alpha/N}$ für $\alpha > 0$

Dabei sei $J(N,\alpha) := \alpha^{-\alpha/N}.\omega_N^{\alpha/N}.(N/(N-\alpha))$.

Beweis: (i) ist evident.

(ii) Ist $\|\sigma\|_\infty = 0$, so ist die Aussage trivial.

Andernfalls sei $R := (\alpha.\|\sigma\|_1/(\omega_N.\|\sigma\|_\infty))^{1/N}$.

$$I(N,\alpha,\sigma,z) = \int_{|z-w|\leq R} \ldots + \int_{|z-w|\geq R} \ldots$$

$$\leq \int_{|w|\leq R} |w|^{-\alpha}\, dw^N.\|\sigma\|_\infty + R^{-\alpha}.\|\sigma\|_1$$

$$= \omega_N(N-\alpha)^{-1}R^{N-\alpha}\|\sigma\|_\infty + R^{-\alpha}.\|\sigma\|_1$$

$$= J(N,\alpha).\|\sigma\|_\infty^{\alpha/N}.\|\sigma\|_1^{1-\alpha/N} \quad //$$

(1.5) Lemma und Definition:

Für $\varepsilon \geq 0$, $\gamma \in \{-1,1\}$, $1 \leq i,j \leq N$ und $z \in \mathbb{R}^N$ sei definiert

$$u^\varepsilon(z) := \gamma.(N-2)^{-1}(z^2+\varepsilon)^{(2-N)/2} \quad \text{falls } N \geq 3$$

$$e^\varepsilon(z) := \gamma.(z^2+\varepsilon)^{-N/2}.z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} u^\varepsilon(z) \quad \text{falls } N \geq 3$$

$$e^\varepsilon_{ij}(z) := \gamma.(z^2+\varepsilon)^{-(2+N)/2}(\delta_{ij}(z^2+\varepsilon) - N.z_i z_j) = \frac{\partial}{\partial z_i} e^\varepsilon_j(z)$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} u^\varepsilon(z) \quad \text{falls } N \geq 3$$

(Ist $\varepsilon = 0$, so sind die Funktionen nur für $z \neq 0$ erklärt.)

Die folgenden Abschätzungen sind trivial:

$$|u^\varepsilon(z)| = (N-2)^{-1}(z^2+\varepsilon)^{(2-N)/2} \leq (N-2)^{-1}.\begin{cases} \varepsilon^{(2-N)/2} \\ |z|^{2-N} \end{cases}$$

$$|e^{\varepsilon}(z)| \leq (z^2+\varepsilon)^{(1-N)/2} \leq \begin{cases} \varepsilon^{(1-N)/2} \\ |z|^{1-N} \end{cases}$$

$$|e^{\varepsilon}_{ij}(z)| \leq N. \begin{cases} \varepsilon^{-N/2} \\ |z|^{-N} \end{cases}$$

Sei nun $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und

$$U^{\varepsilon}_o(z) := \int u^{\varepsilon}(z-w).\sigma(w)\, dw^N \qquad N \geq 3$$

$$E^{\varepsilon}_o(z) := \int e^{\varepsilon}(z-w).\sigma(w)\, dw^N$$

$$E^{\varepsilon}_{oij}(z) := \gamma.\omega_N.N^{-1}(d^2/(\varepsilon+d^2))^{-N/2}.\delta_{ij}.\sigma(z) +$$

$$+ \int_{|z-w|\leq d} e^{\varepsilon}_{ij}(z-w).(\sigma(w)-\sigma(z))\, dw^N + \int_{|z-w|\geq d} e^{\varepsilon}_{ij}(z-w).\sigma(w)\, dw^N$$

mit einem festen $d > 0$ (Wir werden zeigen, daß der Wert von $E^{\varepsilon}_{oij}(z)$ nicht von d abhängt.)

Ist $\varepsilon = 0$, so müssen die Integrale nicht notwendig für jedes $z \in \mathbb{R}^N$ existieren, sie tun es aber in allen von uns betrachteten Fällen.

Wenn keine Mißverständnisse entstehen können, lassen wir den oberen Index ε bei allen obigen Bezeichnungen in der Regel weg.

Die Funktionen U_o (im Fall $N \geq 3$), E_o, E_{oij} haben folgende Eigenschaften:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

U_o, $E_{oij} \in C^{\infty}_b(\mathbb{R}^N)$, $E_o \in C^{\infty}_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, also $E_o \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$E_o(z) = -\frac{\partial}{\partial z} U_o(z)$, $E_{oij}(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} E_{oj}(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} U_o(z)$

$$\operatorname{div}(E_o)(z) = \gamma.N.\varepsilon. \int (|z-w|^2+\varepsilon)^{-(N+2)/2}.\sigma(w)\, dw^N = -\Delta U_o(z)$$

$$\|U_o\|_\infty \leq (N-2)^{-1}.\varepsilon^{(2-N)/2}.\|\sigma\|_1$$

$$\|E_o\|_\infty \leq \varepsilon^{(1-N)/2}.\|\sigma\|_1$$

$$\|E_{oij}\|_\infty \leq N.\varepsilon^{-N/2}.\|\sigma\|_1, \text{ also } \operatorname{lip}(E_o) \leq N^2.\varepsilon^{-N/2}\|\sigma\|_1$$

(ii) Sei $N = 1$, $\varepsilon \geq 0$ und $\sigma \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt

$E_o \in C_b^1(\mathbb{R})$, also $E_o \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R})$

$$E_{o11}(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_o(z) = \gamma. \begin{cases} \varepsilon. \int (|z-w|^2+\varepsilon)^{-3/2}.\sigma(w)\, dw & \varepsilon > 0 \\ 2.\sigma(z) & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\|E_o\|_\infty \leq \|\sigma\|_1$$

$$\|E_{o11}\|_\infty \leq \omega_1.\|\sigma\|_\infty = 2.\|\sigma\|_\infty, \text{ also } \operatorname{lip}(E_o) \leq 2.\|\sigma\|_\infty$$

(iii) Sei $N \geq 2$, $\varepsilon \geq 0$ und $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt

$U_o \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$, $E_o \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$E_o(z) = -\frac{\partial}{\partial z} U_o(z)$$

$$\|U_o\|_\infty \leq (N-2)^{-1}.J(N,N-2).\|\sigma\|_\infty^{(N-2)/N}.\|\sigma\|_1^{2/N}$$

$$\|E_o\|_\infty \leq J(N,N-1).\|\sigma\|_\infty^{(N-1)/N}.\|\sigma\|_1^{1/N}$$

Ist zusätzlich $\sigma \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^N)$, so gilt ferner

$U_o \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$, $E_o \in C_b^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, also $E_o \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$E_{oij} \in C_b(\mathbb{R}^N)$

$$E_{oij}(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} E_{oj}(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} U_o(z)$$

$$\operatorname{div}(E_o)(z) = \gamma \begin{cases} N.\varepsilon. \int (|z-w|^2+\varepsilon)^{-(N+2)/2}.\sigma(w)\, dw^N & \varepsilon > 0 \\ \omega_N.\sigma(z) & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$= -\Delta U_o(z)$$

$$\|E_{oij}\|_\infty \leq \omega_N(N^{-1}\delta_{ij} + N.\log(1+\mathrm{lip}(\sigma))).\|\sigma\|_\infty + N.(\omega_N + \|\sigma\|_1)$$

und daher

$$\mathrm{lip}(E_o) \leq \omega_N(N^{-1} + N^2.\log(1+\mathrm{lip}(\sigma))).\|\sigma\|_\infty + N^2.(\omega_N + \|\sigma\|_1)$$

Beweis: (1) Da im Falle $\varepsilon > 0$ gilt $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$, $e \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, folgen alle Aussagen unmittelbar aus Lemma (1.3), wenn wir gezeigt haben, daß

$$\frac{\partial}{\partial z_i} E_{oj}(z) = \int e_{ij}(z-w).\sigma(w)\, dw^N = E_{oij}(z)$$

Die linke Identität erhält man durch Differentiation unter dem Integralzeichen, wir haben E_{oij} jedoch anders definiert, weil der mittlere Term für $\varepsilon = 0$ sinnlos wird.

Offenbar ist die rechte Identität bewiesen, wenn wir zeigen, daß für $\varepsilon, d > 0$ gilt

$$\int_{|w|\leq d} e_{ij}(w)\, dw^N = \gamma. \int_{|w|\leq d} (w^2+\varepsilon)^{-(1-N)/2}.(\delta_{ij}(w^2+\varepsilon) - N.w_i w_j)\, dw^N$$
$$= \gamma.\omega_N.N^{-1}.\delta_{ij}(d^2/(\varepsilon+d^2))^{N/2}$$

Für $i \neq j$ zeigt die Substitution $w_i \mapsto -w_i$, daß das Integral verschwindet. Für $i = j$ zeigt die Substitution $(w_i, w_1) \mapsto (w_1, w_i)$, daß

$$\int_{|w|\leq d} e_{11}(w)\, dw^N = \int_{|w|\leq d} e_{11}(w)\, dw^N = N^{-1}.\sum_{j=1}^{N} \int_{|w|\leq d} e_{jj}(w)\, dw^N$$

$$= \gamma. \int_{|w|\leq d} \varepsilon.(w^2+\varepsilon)^{-(1+N/2)} dw^N$$

$$= \gamma.\omega_N.\varepsilon \int_0^d r^{N-1}(r^2+\varepsilon)^{-(1+N/2)}\, dr = \gamma.\omega_N.N^{-1}(d^2/(\varepsilon+d^2))^{N/2} \quad (1.5.1)$$

(Beweis durch Differentiation)

(ii) Ist $\varepsilon > 0$, so folgt aus (i), daß E_{o11} die angegebene Form hat. Ist $\varepsilon = 0$, so ist

$$E_o(z) = \gamma \int |z-w|^{-1}(z-w).\sigma(w)\, dw = \gamma.\left(\int_{-\infty}^{z} \sigma(w)\, dw - \int_z^{\infty} \sigma(w)\, dw \right)$$

und daher

$E_{o11}(z) = 2.\gamma.\sigma(z)$.

Ferner gilt für $\varepsilon \geq 0$

$$|E_o(z)| \leq \int |e(z-w).\sigma(w)|dw \leq \|\sigma\|_1$$

Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$|E_{o11}(z)| \leq \varepsilon \int (w^2+\varepsilon)^{-3/2}\, dw.\|\sigma\|_\infty = 2.\|\sigma\|_\infty$$

(Das Integral wurde oben berechnet.) Für $\varepsilon = 0$ gilt

$$|E_{o11}(z)| = |2.\gamma.\sigma(z)| \leq 2.\|\sigma\|_\infty$$

(iii) Im Falle $\varepsilon > 0$ wurden die Aussagen über die Existenz, Form und Stetigkeit der Ableitungen von U_o und E_o bereits unter (i) bewiesen. Es ist bekannt (vgl. Hellwig (1964), sec. IV-4.1), daß sie auch im Fall $\varepsilon = 0$ richtig bleiben.

Die Abschätzungen für U_o und E_o folgen aus Lemma (1.4), es bleibt also nur noch die Abschätzung für E_{oij} zu beweisen. Dazu sei

$d := (1+\mathrm{lip}(\sigma))^{-1} \leq 1$

$E_{oij}(z) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ mit

$J_1 = \gamma.\omega_N.N^{-1}(d^2/(\varepsilon+d^2))^{N/2}$

$$J_2 = \int_{|w|\leq d} e_{ij}(w)(\sigma(z-w) - \sigma(z))\, dw^N$$

$$J_3 = \int_{d\leq|w|\leq 1} e_{ij}(w).\sigma(z-w)\, dw^N$$

$$J_4 = \int_{1\leq|w|} e_{ij}(w).\sigma(z-w)\, dw^N$$

Es gilt

$|J_1| \leq \omega_N.N^{-1}.\delta_{ij}.\|\sigma\|_\infty$

$$|J_2| \leq \int_{|w|\leq d} N.|w|^{-N}.\mathrm{lip}(\sigma).|w|\, dw^N = N.\omega_N.d.\mathrm{lip}(\sigma) \leq N.\omega_N$$

$$|J_3| \leq \int_{d\leq|w|\leq 1} N.|w|^{-N}.\|\sigma\|_\infty\, dw^N = N.\omega_N.\log(d^{-1}).\|\sigma\|_\infty$$

$$= N.\omega_N.\log(1+\mathrm{lip}(\sigma)).\|\sigma\|_\infty$$

$$|J_4| \leq \int_{1\leq|w|} N.|w|^{-N}|\sigma(z-w)|\, dw^N \leq N.\|\sigma\|_1$$

Daraus folgt die Behauptung. //

(1.6) Lemma: Für $z \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon,\eta \geq 0$ gilt

$$|e^\varepsilon(z) - e^\eta(z)| \leq 2.N.|z|^{-N+1/2}.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

Beweis: $|e^\varepsilon(z) - e^\eta(z)| = \left|\int_\eta^\varepsilon \frac{\partial}{\partial\lambda} e^\lambda(z)\, d\lambda\right|$

$$= |-(N/2) \int_{\eta}^{\varepsilon} (z^2+\lambda)^{-N/2-1}.z \, d\lambda \,|$$

$$\leq (N/2).|\int_{\eta}^{\varepsilon} (z^2+\lambda)^{-(N+1)/2} \, d\lambda \,|$$

$$\leq (N/2).|z|^{-N+1/2}.|\int_{\eta}^{\varepsilon} \lambda^{-3/4} \, d\lambda \,|$$

$$= 2.N.|z|^{-N+1/2}.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \quad //$$

(1.7) Definition und Lemma: Für $\varepsilon \geq 0$ und $z \in \mathbb{R}^N$ sei

$$e^{\varepsilon,1}(z) := \begin{cases} e^{\varepsilon}(z) & |z| \geq 1 \\ \gamma.(1+\varepsilon)^{-N/2}.z & |z| \leq 1 \end{cases}$$

$$e^{\varepsilon,2}(z) := e^{\varepsilon}(z) - e^{\varepsilon,1}(z)$$

Dann gilt: (i) $e^{\varepsilon} = e^{\varepsilon,1} + e^{\varepsilon,2}$

(ii) $e^{\varepsilon,1} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$,

$\|e^{\varepsilon,1}\|_{\infty} \leq 1$, $\mathrm{lip}(e^{\varepsilon,1}) \leq N^2$

(iii) $e^{\varepsilon,2} \in L^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$

$\|e^{\varepsilon,2}\|_1 \leq \omega_N.N/(N+1)$, $\mathrm{supp}(e^{\varepsilon,2}) = \{w \in \mathbb{R}^N \mid |w| \leq 1\}$

Beweis: $\mathrm{lip}(e^{\varepsilon,1}) \leq \max \{ \sup_{|z|\geq 1} \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |e^{\varepsilon}_{ij}(z)| \, , \, (1+\varepsilon)^{-N/2} \}$

$$\leq \max \{ \sup_{|z|\geq 1} N^2.|z|^{-N} \, , \, 1 \} = N^2$$

$$\|e^{\varepsilon,2}\|_1 = \omega_N \cdot \int_0^1 r^N((r^2+\varepsilon)^{-N/2} - (1+\varepsilon)^{-N/2}) \, dr$$

$\leq \omega_N \int_0^1 r^N (r^{-N} - 1)\, dr = \omega_N \cdot N/(N+1)$, denn der Integrand ist

für $0 \leq r \leq 1$ monoton nicht wachsend in $\varepsilon > 0$:

$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((r+\varepsilon)^{-N/2} - (1+\varepsilon)^{-N/2})$

$= -(N/2)((r^2+\varepsilon)^{-N/2-1} - (1+\varepsilon)^{-N/2-1}) \leq 0$ //

§2 Die Anfangswertprobleme P^ε ($\varepsilon \geq 0$) und einige Eigenschaften ihrer Lösungen

In diesem Abschnitt kommen wir zum Thema dieser Arbeit, den Anfangswertproblemen P^ε. Der Leser sollte dabei im Auge behalten, daß wir P^ε für $\varepsilon > 0$ betrachten, um später Lösungen von P^0 durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zu gewinnen.

(2.1) Generelle Voraussetzungen:

In der gesamten Arbeit sei erfüllt

(i) $\gamma = +1$ oder $\gamma = -1$

(ii) $\varphi: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die folgender Bedingung genügt:

$(\varphi 0)^*$ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, wir definieren $m := \|\varphi\|_1$.

(iii) $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist eine Funktion, die folgender Bedingung genügt:

(K0) K ist stetig,

$K(t,.) \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ für $t \in \mathbb{R}$

und es gibt $f_K, g_K \in C_+(\mathbb{R})$ derart, daß

$\|K(t,.)\|_\infty \leq f_K(t)$ und $\mathrm{lip}(K(t,.)) \leq g_K(t)$.

(2.2) Definition:

Sei $I \supsetneq \{0\}$ ein Intervall, $\varepsilon \geq 0$.

$\Phi^\varepsilon: I \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von P^ε auf I, falls

(i) $\Phi^\varepsilon(0,.) = \varphi$

(ii) $(y \mapsto e^{\varepsilon(x_s - y_s)} \cdot \Phi^\varepsilon(t,y)) \in L^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N)$

für alle $t \in I$, $x_s \in \mathbb{R}^N$

* Im Anhang findet man ein Verzeichnis wichtiger Definitionen, in dem aufgelistet ist, wo Bedingungen wie diese eingeführt werden.

(iii) Wenn wir setzen

$$E_0^\varepsilon(t,x_s) := \int e^\varepsilon(x_s-y_s).\Phi^\varepsilon(t,y)\, dy^{2N}$$

$E^\varepsilon(t,x_s) := E_0^\varepsilon(t,x_s) + K(t,x_s)$, dann gilt

E^ε ist stetig auf $I\times\mathbb{R}^N$,

$E^\varepsilon(t,.) \in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \cap Lip(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ für $t \in I$

und es gibt $f_E, g_E \in C_+(I)$ derart, daß

$\|E^\varepsilon(t,.)\|_\infty \le f_E(t)$, $lip(E^\varepsilon(t,.)) \le g_E(t)$

(iv) Φ^ε ist ein Integral des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{X}_s(t) = X_v(t), \quad \dot{X}_v(t) = E^\varepsilon(t,X_s(t)) \qquad (2.2.1)$$

(das wegen (iii) für jede Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung auf I besitzt),
d. h. für jede Lösung $X: I \to \mathbb{R}^{2N}$ von (2.2.1) gilt
$\Phi^\varepsilon(t,X(t)) = \Phi^\varepsilon(0,X(0)) = \varphi(X(0)) \quad t \in I.$

Φ^ε heißt globale Lösung, falls $I = \mathbb{R}$, sonst lokale Lösung.

Wenn keine Mißverständnisse entstehen können, lassen wir den oberen Index ε bei den obigen Bezeichnungen in der Regel weg.

(2.3) Lemma und Definition (Eigenschaften von Lösungen von P^ε):
Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \ge 0$ fest) auf I.

Für jedes $t_1 \in I$, $x \in \mathbb{R}^{2N}$ sei $(t \mapsto X^\varepsilon(t,t_1,x))$ oder kürzer $(t \mapsto X(t,t_1,x))$, $t \in I$ die Lösung von (2.2.1) mit

$$X(t_1,t_1,x) = x \qquad (2.3.1)$$

Dann gelten folgende Aussagen

(i) X ist stetig auf $I\times I\times\mathbb{R}^{2N}$.

(ii) Für jedes $t,t_1 \in I$ ist $X(t,t_1,.)$ ein maßerhaltender Homöomorphismus des $\mathbb{R}^{2N}$.

(iii) Für $t_1,t_2,t_3 \in I$ gilt

$$X(t_1,t_2,.) \circ X(t_2,t_3,.) = X(t_1,t_3,.), \qquad (2.3.2)$$

insbesondere also

$$X(t_1,t_2,.) \circ X(t_2,t_1,.) = X(t_1,t_1,.) = id_{\mathbb{R}^{2N}}, \text{ d. h.}$$

$$(X(t_1,t_2,.))^{-1} = X(t_2,t_1,.)$$

(iv) Falls $\frac{\partial}{\partial x_s} E(t,x_s)$ existiert und stetig auf $I\times\mathbb{R}^N$ ist, dann ist X stetig differenzierbar nach allen Argumenten und erfüllt das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t_1} X_i(t,t_1,x) + x_v \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} X_i(t,t_1,x) + E(t_1,x_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_v} \cdot X_i(t,t_1,x) = 0$$

$$(1 \leq i \leq 2N) \qquad (2.3.3)$$

(v) Weil Φ ein Integral von (2.2.1) ist, gilt für $t,t_1 \in I$

$\Phi(t,X(t,t_1,x)) = \varphi(X(0,t_1,x))$, insbesondere für $t = t_1$

$$\Phi(t,x) = \varphi(X(o,t,x)) \qquad (2.3.4)$$

Also hat Φ den gleichen Wertebereich wie φ, speziell gilt $\Phi \geq 0$ für $\varphi \geq 0$ und $\|\Phi(t,.)\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$.

Φ ist stetig, wenn φ stetig ist.

Ist $E(t,x_s)$ stetig differenzierbar nach x_s, so folgt aus (2.3.3), (2.3.4) und der Kettenregel:

Ist φ (stetig) differenzierbar, dann ist Φ (stetig) differenzierbar und erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t,x) + x_v \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi(t,x) + E(t,x_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_v} \Phi(t,x) = 0 \qquad (2.3.5)$$

(vi) (2.3.4) und (ii) implizieren, daß für jedes $t,t_1 \in I$ und jede meßbare Funktion $\sigma: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^M$ gilt:
$\sigma \in L^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^M)$ genau, wenn $\sigma \circ X(t_1,t,.) \in L^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^M)$.
In diesem Fall gilt

$$\int \sigma(x)\, dx^{2N} = \int \sigma(X(t_1,t,x))\, dx^{2N} .$$

(Für einfache Funktionen σ ist die Aussage trivial, sonst folgt sie durch Approximation.)
Insbesondere gilt für $t_1 = 0$ und $\sigma = |\varphi|^p$ $(1 \leq p < \infty)$
wegen $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N}) \supset L^p(\mathbb{R}^{2N})$ für jedes $t \in I$
$\Phi(t,.) \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ und $\|\Phi(t,.)\|_p = \|\varphi\|_p$ (2.3.6)

(vii) Wir definieren für $t \in I$, $x_s \in \mathbb{R}^N$

$$\Phi_\rho(t,x_s) := \int \Phi(t,x)\, dx_v^N$$

(Wenn der Integrand nicht in $L^1(\mathbb{R}^N)$ liegt, sei das Integral gleich Null gesetzt.)
Analog sei $|\Phi|_\rho(t,.)$ erklärt.
Diese Funktionen sind nach Fubini für festes $t \in I$ Elemente von $L^1(\mathbb{R}^N)$. Es gilt
$\|\Phi_\rho(t,.)\|_1 \leq \||\Phi|_\rho(t,.)\|_1 = \|\varphi\|_1 = m$ und es ist

$$E_o(t,x_s) = \int e(x_s - y_s).\Phi_\rho(t,y_s)\, dx_s^N .$$

Wir werden Lemma (1.5) immer für $\sigma = \Phi_\rho(t,.)$ anwenden und haben deshalb auch dort die Bezeichnung E_o gewählt.

Beweis: Alle Aussagen sind aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannt (vgl. Hartman (1964) p. 131 ff.). Den Beweis, daß $X(t,t_1,.)$ maßerhaltend ist, findet man bei Batt (1962), S. 62 //

(2.4) Satz und Definition: Sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert eine eindeutige Lösung Φ^ε von P^ε auf $\mathbb{R}$.

Die Funktionen f_E und g_E kann man wie folgt wählen:

$$f_E(t) = \varepsilon^{-(N-1)/2}.m + f_K(t)$$

$$g_E(t) = \varepsilon^{-N/2}.N^2.m + g_K(t).$$

Im Falle $\varepsilon > 0$ bezeichne Φ^ε (oder kürzer Φ) immer diese Funktion.

Bemerkung: Die oben angegebenen Funktionen f_E und g_E sind zur Untersuchung von P^0 nicht geeignet. Wir werden deshalb später andere Funktionen verwenden, die auch die in Definition (2.2) geforderten Eigenschaften haben, aber nicht von ε abhängen.

Beweis: Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ist ein sehr spezieller Fall von Neunzert (1975), Satz 3.4.

Sei Φ die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$E_0(t,x_s) = \int e(x_s-y_s).\Phi(t,y)\, dy^{2N}$$

$$= \int e(x_s-y_s).\varphi(X(0,t,y))\, dy^{2N}$$

$$= \int e(x_s-X_s(t,0,y)).\varphi(y)\, dy^{2N}$$

E_0 ist eine stetige Funktion von t und x_s wegen Lemma (1.3) und Lemma (2.3). Analog ist

$$\frac{\partial}{\partial x_{s_i}} E_{0j}(t,x_s) = \int e_{ij}(x_s-X_s(t,0,y)).\varphi(y)\, dy^{2N}.$$

Mit Lemma (1.5), (i) folgen die Aussagen über f_E und g_E //

(2.5) Lemma: Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$ fest) auf I,
$S: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine längentreue lineare Abbildung, $a \in \mathbb{R}^{2N}$.
Definiere $S_a^*: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ durch
$S_a^*(t,x) := (S(x_s) - a_s - t.a_v, S(x_v) - a_v)$
$K': \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch $K'(t,x_s) := S^{-1}(K(t,S(x_s)-a_s-t.a_v)$
$\Psi: I\times\mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ durch $\Psi(t,x) := \Phi(t,S_a^*(t,x))$
$\psi: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ durch $\psi(x) = \varphi(S_a^*(0,x))$.

Dann ist Ψ eine Lösung von P^ε mit φ ersetzt durch ψ und
und K ersetzt durch K' auf I.

Beweis: Nachzuweisen ist, daß Ψ (2.2),(1)-(iv) mit
ψ statt φ und K' statt K erfüllt.
(i) ist evident
(ii) folgt aus der Substitutionsregel für Integrale:
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $S_a^*(t,.)$ bijektiv, $|\det(\frac{\partial}{\partial x} S_a^*(t,x))| = 1$

$$e(x_s-y_s).\Psi(t,y) = S^{-1} \circ e(S_a^*(t,x)_s - S_a^*(t,y)_s).\Phi(t,S_a^*(t,y)) \qquad (2.5.1)$$

und die rechte Seite ist nach Voraussetzung über y integrierbar.

(iii) Sei $E_o'(t,x_s) := \int e(x_s-y_s).\Psi(t,y)\, dy^{2N}$, $E' := E_o' + K'$
Integration von (2.5.1) über $y \in \mathbb{R}^{2N}$ ergibt
$S(E'(t,x_s)) = E(t,S(x_s)-a_s-t.a_v)$, also kann man setzen
$f_{E'} = f_E$, $g_{E'} = g_E$.

(iv) Sei Y eine Lösung von
$\dot{Y}_s(t) = Y_v(t)$, $\dot{Y}_v(t) = E'(t,Y(t))$ $\quad t \in I$
Dann ist $X(t) := S_a^*(t,Y(t))$ eine Lösung von
$\dot{X}_s(t) = X_v(t)$, $\dot{X}_v(t) = S(E'(t,Y_s(t)) = E(t,X(t))$.
Also gilt $\Psi(t,Y(t)) = \Phi(t,X(t)) = \varphi(X(0)) = \psi(Y(0))$ //

(2.6) Lemma: Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$ fest) auf I,
Sei $K'(t,x_s) := K(-t,x_s)$, $\Psi(t,x) := \Phi(-t,x_s,-x_v)$,
$\psi(x) := \varphi(x_s,-x_v)$ für $t \in -I$, $x \in \mathbb{R}^{2N}$.

Dann ist Ψ eine Lösung von P^ε mit φ ersetzt durch ψ und K ersetzt durch K' auf -I.

Beweis: Nachzuweisen ist wieder (2.2),(i)-(iv) mit ψ und K' statt φ und K.

(i)-(iii) ist trivial. Man findet, daß für

$$E'_0(t,x_s) := \int e(x_s-y_s).\Psi(t,y)\, dy^{2N},\quad E' := E'_0 + K' \text{ gilt}$$

$E'(t,x_s) = E(-t,x_s)$. Es folgt, daß man
$f_{E'}(t) = f_E(-t)$ und $g_{E'}(t) = g_E(-t)$ setzen kann.

(iv) Sei $Y(t)$, $t \in -I$ eine Lösung von
$\dot{Y}_s(t) = Y_v(t)$, $\dot{Y}_v(t) = E'(t,Y_s(t))$ $t \in -I$
Dann ist $X(t) := (Y_s(-t),-Y_v(-t))$ Lösung von
$\dot{X}_s(t) = X_v(t)$, $\dot{X}_v(t) = E'(-t,X_s(t)) = E(t,X_s(t))$, $t \in I$
Also gilt $\Psi(t,Y(t)) = \Phi(-t,X(-t)) = \varphi(X(0)) = \psi(Y(0))$ //

Bemerkung. Dieses Lemma ermöglicht es uns, von nun an nur noch Lösungen von P^ε auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}^+_0$ zu untersuchen. Da die in der Folge verwendeten Voraussetzungen an K und φ (mit einer Ausnahme, auf die wir hinweisen,) immer auch von K' und ψ erfüllt werden, gelten die bewiesenen Aussagen dann immer auch für negative t.

Generelle Voraussetzung für den Rest der Arbeit:
$I \supsetneq \{0\}$ ist ein Intervall mit $I \subset \mathbb{R}^+_0$

§3 Schranken für Φ_ρ und verwandte Fragen, Erhaltungssätze.

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Bedingungen an φ die Beschränktheit von $\Phi_\rho(t,.)$ gewährleisten. Im Hinblick auf spätere Anwendungen sind die Überlegungen aber etwas allgemeiner formuliert. Es folgen Aussagen über gewisse Momente von Φ. Dabei wird im Falle $\varepsilon = 0$ die Beschränktheit von Φ_ρ verwendet. Von besonderer Bedeutung ist der Energiesatz, der im Falle $N = 3$ überraschende Konsequenzen hat.

(3.1) Definition: Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$) auf I, $k \geq 0$. Wir sagen Φ erfüllt $(\Phi 1_k)$ auf I, wenn es ein $f_{\Phi k} \in C_+(I)$ gibt derart, daß für alle $x_s \in \mathbb{R}^N$, $t \in I$

$$\int |x_v|^k . |\Phi(t,x)| \, dx_v^N \leq f_{\Phi k}(t)$$

(Das Integral sei Null gesetzt, wenn der Integrand nicht meßbar ist.)

Im Falle $k = 0$ setzen wir $f_\Phi := f_{\Phi 0}$

Bemerkung: Erfüllt Φ $(\Phi 1_0)$ auf I, so gilt für $t \in I$, $x_s \in \mathbb{R}^N$ $|\Phi_\rho(t,x_s)| \leq |\Phi|_\rho(t,x_s) \leq f_\Phi(t)$, d.h. $\Phi_\rho(t,.)$ ist lokal gleichmäßig in t beschränkt.

(3.2) Definition: Sei $k \geq 1 - N$. Wir sagen φ erfüllt $(\varphi 1_k)$, falls es Konstanten C_k^1 und C_k^2 gibt derart, daß für alle $b \geq 0$ gilt

$$\omega_N \cdot I_0^{*\infty} r^{N+k-1} \cdot \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^{2N},\ r-b \leq |x_v| \leq r+b\}\, dr$$
$$\leq C_k^1 \cdot (b + C_k^2)^{N+k}$$

Dabei sei $I_c^{*d} f(r)\, dr$ das Lebesguesche Oberintegral der Funktion $f \cdot \chi_{[c,d]}$ (vgl. Dieudonné (1970) p. 115ff.).

Bemerkung. Ist φ stetig, so kann man das Oberintegral durch das Integral ersetzen, weil man dann das Supremum als Supremum abzählbar vieler meßbarer Funktionen von r berechnen kann. Analog läßt sich die Meßbarkeit in später betrachteten ähnlichen Situationen begründen.

(3.3) Lemma und Definition:

Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$) auf I, $k \geq 0$, φ erfülle $(\varphi 1_k)$. Dann erfüllt Φ $(\Phi 1_k)$ auf I und, wenn man setzt

$$f_1(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} ||X_v(t,0,x)| - |x_v||, \text{ so gilt}$$

$$f_1(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} ||X_v(t,0,x)| - |x_v||$$
$$\leq \int_0^t \|E(r,.)\|_\infty\, dr \leq \int_0^t f_E(r)\, dr \text{ und}$$

$$\int |x_v|^k \cdot |\Phi(t,x)|\, dx_v^N \leq C_k^1 \cdot (f_1(t) + C_k^2)^{N+k}$$

Beweis: Wegen der Bijektivität von $X(t,0,.)$ gilt

$$f_1(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} ||X_v(o,t,X(t,0,x))| - |X_v(t,0,x)||$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} ||x_v| - |X_v(t,0,x)|| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} |X_v(t,0,x) - x_v|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} \left| \int_0^t E(r,X_s(r,0,x))\, dr \right| \leq \int_0^t \|E(r,.)\|_\infty \, dr$$

$\leq \int_0^t f_E(r)\, dr$. Ferner gilt

$$\int |x_v|^k . |\Phi(t,x)|\, dx_v^N$$

$\leq \omega_N . I_o^{*\infty} r^{N-1+k} . \sup\{|\Phi(t,x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ |x_v|=r\}\, dr$

$= \omega_N . I_o^{*\infty} r^{N-1+k} . \sup\{|\varphi(X(0,t,x))| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ |x_v|=r\}\, dr$

$\leq \omega_N . I_o^{*\infty} r^{N-1+k} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2n},\ r-f_1(t)\leq|x_v|\leq r+f_1(t)\}\, dr$

$\leq C_k^1 . (f_1(t) + C_k^2)^{N+k}$ //

(3.4) Lemma: Sei $k \geq 1 - N$ und

$J := I_o^{*\infty} r^{N+k-1} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ r\leq|x_v|\leq 3r\}\, dr < \infty$.

Dann erfüllt φ $\{\varphi 1_k\}$.

Beweis: $I_o^{*\infty} r^{N+k-1} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ r-b\leq|x_v|\leq r+b\}\, dr$

$\leq I_o^{*2b} \ldots dr + I_{2b}^{*\infty} \ldots dr$

$I_o^{*2b} \ldots \leq (N+k)^{-1} . \|\varphi\|_\infty . (2b)^{N+k}$

$I_{2b}^{*\infty} \ldots = I_b^{*\infty} (r+b)^{N+k-1} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ r\leq|x_v|\leq r+2b\}\, dr$

$\leq I_b^{*\infty} (2.r)^{N+k-1} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^{2N},\ r\leq|x_v|\leq 3r\}\, dr$

$\leq 2^{N+k-1} . J$

Also gilt $\omega_N . I_o^{*\infty} \ldots dr \leq \omega_N . ((N+k)^{-1} . \|\varphi\|_\infty . 2^{N+k} . b^{N+k} + 2^{N+k-1} . J)$

$\leq C_k^1 (b + C_k^2)^{N+k}$ mit $C_k^1 := \omega_N . (N+k)^{-1} . \|\varphi\|_\infty . 2^{N+k}$ und

$C_k^2 := (\omega_N . 2^{N+k-1} . J / C_k^1)^{1/(N+k)}$ für $C_k^1 > 0$ und $C_k^2 = 0$ sonst //

Bemerkungen: (i) Für $\varepsilon = 0$ betrachten wir immer nur Lösungen von P^ε, die $(\Phi 1_0)$ erfüllen. Wir benötigen diese Voraussetzung zum Beweis der lokalen Beschränktheit und Lipschitzstetigkeit von $E(t,.)$ (vgl. Lemma (1.5),(iii)).

(ii) φ erfüllt $(\varphi 1_k)$ für alle $k \geq 1 - N$, falls es ein $P_o \geq 0$ gibt derart, daß $\varphi(x) = 0$ für $|x_v| \geq P_o$. (Diese Bedingung verwendet Batt (1977).) In diesem Fall gilt trivialerweise

$$\omega_N \cdot I^{*\infty}_o \, r^{N-1+k} . \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^{2N},\ r-b \leq |x_v| \leq r+b\}\, dr$$
$$\leq \omega_N \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot (N+k)^{-1} (P_o + b)^{N+k}.$$

(3.5) Definition: Wir sagen K erfüllt (K1), wenn es ein $W \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ und $f_W, g_W \in C_+(\mathbb{R})$ gibt derart, daß

$K(t,x_s) = -\frac{\partial}{\partial x_s} W(t,x_s)$ und

$\|W(t,.)\|_\infty \leq f_W(t)$

$\|\dot{W}(t,.)\|_\infty \leq g_W(t)$, wobei $\dot{W}(t,x_s) := \frac{\partial}{\partial t} W(t,x_s)$ sei.

(3.6) Definition und Lemma: Sei $N \geq 3$, $\varepsilon \geq 0$, K erfülle (K1) und Φ^ε sei eine Lösung von P^ε auf I. Ist $\varepsilon = 0$, so gelte zusätzlich, daß Φ^ε auf I $(\Phi 1_0)$ erfüllt. Wir setzen

$$U^\varepsilon_o(t,x_s) := \int u^\varepsilon(x_s - y_s).\Phi^\varepsilon(t,y)\, dy^{2N}, \quad t \in I,\ x_s \in \mathbb{R}^N,$$

$$U^\varepsilon(t,x_s) := U^\varepsilon_o(t,x_s) + W(t,x_s).$$

U^ε_o und U^ε sind wohldefiniert und es gilt

$$E^\varepsilon_o(t,x_s) = -\frac{\partial}{\partial x_s} U^\varepsilon_o(t,x_s),\ E^\varepsilon(t,x_s) = -\frac{\partial}{\partial x_s} U^\varepsilon(t,x_s).$$

Wenn keine Mißverständnisse entstehen können, lassen wir den oberen Index ε weg.

Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition von U_o und U und Lemma (1.5) angewandt auf $\sigma = \Phi_\rho(t,.)$. //

Bemerkung: Im Falle N = 1 oder N = 2 könnten wir auch Potentiale U betrachten. $u(x_s)$ wäre $-\gamma.(x_s^2 + \varepsilon)^{1/2}$ für N = 1 und $-(1/2).\gamma.\log(x_s^2 + \varepsilon)$ für N = 2. Da diese Funktionen aber im Unendlichen nicht beschränkt sind, wären immer zusätzliche Untersuchungen erforderlich. Wir verzichten darauf, zumal wir für N = 1,2 auch so globale Existenz von Lösungen beweisen können.

(3.7) Definition: Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$) auf I. Für $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^{2N}$, $1 \leq i,j \leq N$, $i \neq j$ sei

$mo_i(t,x) := X_{N+i}(t,0,x)$

$cm_i(t,x) := X_i(t,0,x)$

$am_{ij}(t,x) := X_i(t,0,x).X_{N+j}(t,0,x) - X_j(t,0,x).X_{N+i}(t,0,x)$

$ke(t,x) := |X_v(t,0,x)|^2$

$mi(t,x) := |X_s(t,0,x)|^2$

Ist $N \geq 3$ und erfüllt K die Bedingung (K1) und erfüllt Φ, falls $\varepsilon = 0$ ist, $(\Phi 1_o)$ auf I, so sei

$pe(t,x) := U_o(t,X_s(t,0,x)) + 2.W(t,X_s(t,0,x))$

$en(t,x) := ke(t,x) + pe(t,x)$

Ist f eine der soeben definierten Funktionen, so sei

$M_f := \{t \in I \mid (x \mapsto f(t,x).\varphi(x)) \in L^1(\mathbb{R}^{2N})\}$ und für $t \in M_f$

$$[f](t) := \int f(t,x).\varphi(x)\, dx^{2N}$$

Bemerkung: Wir erinnern daran, daß für $t \in M_f$ nach Lemma (2.3) gilt

$$[f](t) = \int f(t,X(0,t,x)).\Phi(t,x)\ dx^{2N}, \text{ also z.B.}$$

$$[ke](t) = \int x_v^2.\Phi(t,x)\ dx^{2N} \text{ und}$$

$$[pe](t) = \int (U_o(t,x_s) + 2.W(t,x_s)).\Phi(t,x)\ dx^{2N}$$

$$= \int u(x_s-y_s).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\ dx^{2N}\ dy^{2N} + 2.\int W(t,x_s).\Phi(t,x)\ dx^{2N}$$

(3.8) Satz: Sei Φ eine Lösung von P^ε ($\varepsilon \geq 0$) auf I und $1 \leq i,j \leq N$, $i \neq j$. Im Falle $\varepsilon = 0$ erfülle Φ ($\Phi 1_o$) auf I.

(i) Ist $0 \in M_{mo_i}$, so gilt $M_{mo_i} = I$,

$[mo_i]$ ist differenzierbar auf I und

$$[mo_i]'(t) = \int \{K_i(t,x_s)\}.\Phi(t,x)\ dx^{2N} \qquad \text{(Impulssatz)}$$

Ist zusätzlich $0 \in M_{cm_i}$, so gilt $M_{cm_i} = I$,

$[cm_i]$ ist zweimal differenzierbar auf I und

$$[cm_i]'(t) = [mo_i](t)$$

$$[cm_i]''(t) = [mo_i]'(t) \qquad \text{(Schwerpunktsatz)}$$

(ii) Ist $0 \in M_{am_{ij}}$ und

$$\int (|x_i|+|x_j|+|x_{N+i}|+|x_{N+j}|).|\varphi(x)|\ dx^{2N} < \infty,$$

so gilt $M_{am_{ij}} = I$, $[am_{ij}]$ ist differenzierbar auf I und

$$[am_{ij}]'(t) = \int \{x_i . K_j(t,x_s) - x_j . K_i(t,x_s)\} . \Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

(Drehimpulssatz)

(iii) Sei $N \geq 3$, K erfülle (K1). Dann gilt $M_{pe} = I$.
Ist $0 \in M_{ke}$, so ist $M_{ke} = I$,
[pe], [ke] und [en] sind differenzierbar und

$$[en]'(t) = 2. \int \{\dot{W}(t,x_s)\} . \Phi(t,x)\, dx^{2N} \qquad \text{(Energiesatz)}$$

Ist $0 \in M_{ke} \cap M_{mi}$, so gilt $M_{mi} = I$,
[mi] ist zweimal differenzierbar. Für $\varepsilon = 0$ ist

$$[mi]''(t) = 2.[ke](t) + (N-2). \int U_o(t,x_s) . \Phi(t,x)\, dx^{2N}$$
$$+ 2. \int \{x_s . K(t,x_s)\} . \Phi(t,x)\, dx^{2N} \qquad \text{(Trägheitsmomentsatz)}$$

Jede der obigen Aussagen wird besonders einfach, wenn K so beschaffen ist, daß der Term in geschweiften Klammern verschwindet. Mit Ausnahme des Trägheitsmomentsatzes handelt es sich dann um Erhaltungssätze.

Beweis: Außer (iii) für $\varepsilon = 0$ ist alles eine unmittelbare Konsequenz von Lemma (1.3) über die Differentation unter dem Integralzeichen. Im genannten Fall benötigt man noch ein Approximationsargument. Weil die gleichen Schlüsse immer wieder verwendet werden, beweisen wir nur (iii), zumal wir (i) und (ii) in dieser Arbeit nicht weiter verwenden.

Es gilt $|W(t,X_s(t,0,x))| \leq f_W(t)$

$$|U_o(t,X_s(t,0,x))| \leq \begin{cases} (N-2)^{-1} . \varepsilon^{(2-N)/2} . m & \varepsilon > 0 \\ (N-2)^{-1} J(N,N-2) . m^{2/N} . (f_\Phi(t))^{(N-2)/N} & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt $M_{pe} = I$.

Sei nun $0 \in M_{ke}$.

$$|X_v(t,0,x)|^2 = |x_v + \int_0^t E(r,X_s(t,0,x))\,dr\,|^2$$

$$\leq (|x_v| + t.f_E(t))^2 \leq 2.(|x_v|^2 + t^2.(f_E(t))^2)$$

Daraus folgt $M_{ke} = I$.

$$|\frac{\partial}{\partial t} W(t,X_s(t,0,x))|$$

$$= |\dot{W}(t,X_s(t,0,x)) - X_v(t,0,x).K(t,X_s(t,0,x))|$$

$$\leq g_W(t) + f_K(t).(|x_v| + t.f_E(t))$$

Also ist nach Lemma (1.3) $2.\int W(t,X_s(t,0,x)).\varphi(x)\,dx^{2N}$

differenzierbar nach t und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\, 2.\int W(t,X_s(t,0,x)).\varphi(x)\,dx^{2N} \qquad (3.8.1)$$

$$= 2.\int (\dot{W}(t,X_s(t,0,x)) - X_v(t,0,x).K(t,X_s(t,0,x))).\varphi(x)\,dx^{2N}$$

Sei nun $\eta = \varepsilon$, falls $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$, falls $\varepsilon = 0$.

$$|\,u^\eta(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y))\,| \leq (N-2)^{-1}.\eta^{(2-N)/2}$$

$$|\frac{\partial}{\partial t}\, u^\eta(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y))|$$

$$= |-\,e^\eta(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y)).(X_v(t,0,x) - X_v(t,0,y))|$$

$$\leq \eta^{(1-N)/2}.(|x_v| + |y_v| + 2.t.f_E(t))$$

Also existiert für alle $t \in I$

$$\int u^\eta(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y)).\varphi(x).\varphi(y)\,dx^{2N}\,dy^{2N},$$

ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u^{\eta}(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y)).\varphi(x).\varphi(y)\,dx^{2N}\,dy^{2N}$$

$$= -\int e^{\eta}(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y)).(X_v(t,0,x) - X_v(t,0,y)).$$

$$.\varphi(x).\varphi(y)\,dx^{2N}dy^{2N}$$

$$= -2.\int e^{\eta}(X_s(t,0,x) - X_s(t,0,y)).X_v(t,0,x).\varphi(x).\varphi(y)\,dx^{2N}dy^{2N}$$

$$= -2.\int e^{\eta}(x_s - y_s).x_v.\Phi(t,x).\Phi(t,y)\,dx^{2N}\,dy^{2N} \qquad (3.8.2)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\,ke(t,x)\right| = |2.X_v(t,0,x).E(t,X_s(t,0,x))|$$

$$\leq 2.(|x_v| + t.f_E(t)).f_E(t)$$

Daraus folgt, daß [ke] differenzierbar ist und

$$\frac{d}{dt}\,[ke](t) = 2.\int X_v(t,0,x).E(t,X_s(t,0,x)).\varphi(x)\,dx^{2N}$$

$$= 2.\int x_v.E_o(t,x_s).\Phi(t,x)\,dx^{2N}$$

$$+ 2.\int X_v(t,0,x).K(t,X_s(t,0,x)).\varphi(x)\,dx^{2N}$$

$$= 2.\int x_v.e^{\varepsilon}(x_s - y_s).\Phi(t,y).\Phi(t,x)\,dy^{2N}\,dx^{2N}$$

$$+ 2.\int X_v(t,0,x).K(t,X_s(t,0,x)).\varphi(x)\,dx^{2N} \qquad (3.8.3)$$

Aus (3.8.1)-(3.8.3) folgt

$$\frac{d}{dt}\,([en](t) + \int (u^{\eta}(x_s-y_s) - u^{\varepsilon}(x_s-y_s)).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\,dx^{2N}dy^{2N})$$

$$= 2.\int \dot{W}(t,x_s).\Phi(t,x)\,dx^{2N}$$

$$- 2.\int x_v.(e^{\eta}(x_s-y_s) - e^{\varepsilon}(x_s-y_s)).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\,dx^{2N}dy^{2N}$$

Im Falle $\varepsilon > o$ ist $\eta = \varepsilon$ und der Energiesatz ist bewiesen.

Im Falle $\varepsilon = 0$ konvergiert das Integral

$$\int (u^{\eta}(x_s - y_s) - u^{o}(x_s - y_s)).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

punktweise auf I gegen Null für $\eta \to 0$. (Man wende den Konvergenzsatz von Lebesgue an, Majorante für u^{η} ist $|u^{o}|$.)
Das Integral

$$\int x_v.(e^{\eta}(x_s - y_s) - e^{o}(x_s - y_s)).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von I gegen Null für $\eta \to 0$, denn man kann es nach Lemma (1.6) und (1.4) abschätzen durch

$$2.N.\eta^{1/4}.J(N,N-1/2).m^{1/2N}.(f_{\Phi}(t))^{1-1/2N}.\int |x_v|.|\Phi(t,x)|\, dx^{2N}$$

$$\leq 2.N.\eta^{1/4}.J(N,N-1/2).m^{1/2N}.(f_{\Phi}(t))^{1-1/2N}.\Big(\int |x_v|.|\varphi(x)|\, dx^{2N} + f_E(t).m\Big)$$

Durch Grenzübergang $\eta \to 0$ folgt der Energiesatz.

Sei nun zusätzlich $0 \in M_{mi}$.
Völlig analog zu obigen Überlegungen zeigt man, daß $M_{mi} = I$ ist, und unter zweimaliger Verwendung von Lemma (1.3), daß

$$[mi]''(t) = 2.\int (x_v^2 + x_s.E(t,x_s)).\Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

$$= 2.[ke](t) + 2.\int x_s.e(x_s - y_s).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

$$+ 2.\int x_s.K(t,x_s).\Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

$$= 2.[ke](t) + 2.\int x_s K(t,x_s).\Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

$$+ \int (x_s - y_s).e^{\varepsilon}(x_s - y_s).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

Sei nun $\varepsilon = 0$. In diesem Fall gilt für $z \in \mathbb{R}^N$

$z.e^o(z) = (N-2).u^o(z)$. Es folgt

$$[mi]''(t) = 2.[ke](t) + 2.\int x_s.K(t,x_s).\Phi(t,x)\,dx^{2N}$$

$$+ (N-2).\int u^o(x_s-y_s).\Phi(t,x)\,dx^{2N}$$

Damit ist alles gezeigt. //

(3.9) Korollar: Es sei $N \geq 4$, $\varepsilon = 0$, $\gamma = -1$, $K \equiv 0$.
$\varphi \geq 0$ erfülle $(\varphi 1_o)$, es sei $0 \in M_{ke} \cap M_{mi}$ und $[en](0) < 0$.
I sei ein unbeschränktes Intervall mit $0 \in I$.
Dann existiert keine Lösung von P^o auf I.

Beweis: Annahme: Φ ist eine Lösung von P^o auf I.
Wegen Lemma (3.3) erfüllt Φ auf I die Bedingung $(\Phi 1_o)$.
Aus Satz (3.8) folgt wegen $K \equiv 0$ für $t \in I$
$[mi]''(t) = 2.[ke](t) + (N-2).[pe](t) \leq 2.[en](t) = 2.[en](0)$
Weil I unbeschränkt ist und $[en](0) < 0$, muß $[mi]$ auch
negative Werte annehmen. Dies ist ein Widerspruch, weil φ,
also Φ, also auch $[mi]$ nichtnegativ ist. //

Bemerkung: Eine Funktion φ, wie oben gefordert, existiert
immer. Man nehme $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi \geq 0$, $\psi \not\equiv 0$. Dann erfüllt ψ alle
Voraussetzungen, evtl. außer $[en](0) < 0$. Diese Bedingung
erfüllt dann aber $\varphi := \lambda.\psi$ für genügend großes $\lambda \in \mathbb{R}_o^+$.

In der Folge bezeichne $p' \in [1,\infty]$ immer den zu $p \in [1,\infty]$
konjugierten Index.

(3.10) Lemma: Sei $1 < p \leq \infty$, $\sigma \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\sigma \geq 0$ und

$J := \int z^2.\sigma(z)\, dz^N < \infty$. Dann gilt $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und

$\|\sigma\|_1 \leq (1 + (\omega_N/N)^{1/p'}).\|\sigma\|_p^{2p'/(N+2p')}.J^{N/(N+2p')}$

Beweis: Ist $\|\sigma\|_p = 0$, so ist die Aussage trivial. Im anderen Fall sei $R := J^{p'/(N+2p')}.\|\sigma\|_p^{-p'/(N+2p')}$

$$\int \sigma(z)\, dz^N = \int_{|z|\leq R} \sigma(z)\, dz^N + \int_{|z|\geq R} \sigma(z)\, dz^N =: J_1 + J_2$$

$J_1 \leq (\omega_N.R^N/N)^{1/p'}.\|\sigma\|_p < \infty$

$J_2 \leq R^{-2}.J < \infty$. Es folgt

$\|\sigma\|_1 \leq (\omega_N/N)^{1/p'}.R^{N/p'}).\|\sigma\|_p + R^{-2}.J$

$= (1 + (\omega_N/N)^{1/p'}.\|\sigma\|_p^{2p'/(N+2p')}.J^{N/(N+2p')}$ //

(3.11) Lemma: Sei $1 < p \leq \infty$, $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$, $\psi \geq 0$,

$J := \int x_v^2.\psi(x)\, dx^{2N} < \infty$. Dann existiert für fast alle $x_s \in \mathbb{R}^N$

$\psi_\rho(x_s) := \int \psi(x)\, dx_v^N$.

Sei $r := (2.p + N.(p-1))/(2 + N(p-1))$ $(:= (2+N)/N$, falls $p = \infty)$

(äquivalent ausgedrückt $p = (2.r - N.(r-1))/(2 - N.(r-1))$)

Dann gilt $\psi_\rho \in L^r(\mathbb{R}^N)$ und

$\|\psi_\rho\|_r \leq (1 + (\omega_N/N)^{1/p'}).\|\psi\|_p^{2p'/(N+2p')}.J^{N/(N+2p')}$

Beweis: O.B.d.A. sei ψ beschränkt und habe kompakten Träger. Der allgemeine Fall folgt dann mit dem Satz von Beppo Levi.

Wir bemerken zunächst, daß gilt

$$((N + 2.p').p/(2.p'.r))^{-1} + ((N + 2.p')/(N.r))^{-1}$$

$$= r.((2.p'/(N + 2.p')).p^{-1} + N/(N + 2.p'))$$

$$= r.((2.p' - 2 + N)/(N + 2.p'))$$

$$= r.((2.p - (2-N).(p-1))/(N.(p-1) +2.p))$$

$$= r.((2 + N.(p-1))/(2.p + N.(p-1))) = r.r^{-1} = 1,$$

also sind $(N + 2.p').p/(2.p'.r)$ und $(N + 2.p')/(N.r)$ konjugierte Indizes. Aus Lemma (3.10) folgt

$$\left(\int \psi(x)\, dx_v^N \right)^r \leq (1+(\omega_N/N)^{1/p'})^r . \left(\int |\psi(x)|^p\, dx_v^N \right)^{2p'r/((N+2p')p)} .$$

$$. \left(\int x_v^2 . \psi(x)\, dx_v^N \right)^{Nr/(N+2p')}$$

Wir integrieren diese Ungleichung über $x_s \in \mathbb{R}^N$ und wenden die Höldersche Ungleichung an. Daraus folgt die Behauptung. //

(3.12) Lemma und Definition (Sobolev):

Seien $r,q \in]1,\infty[$, $\lambda \in [0,N[$, $r^{-1} + q^{-1} + \lambda/N = 2$, $\sigma_1 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $\sigma_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt

$$\int |z - w|^{-\lambda} . \sigma_1(z) . \sigma_2(w)\, dz^N\, dw^N \leq C_{rq\lambda N} . \|\sigma_1\|_r . \|\sigma_2\|_q$$

mit $C_{rq\lambda N} := N^{-\lambda/2} (2^{1/r'+1/q'} (1 - \lambda/N)^{-1} (r'^{q/r'} + q'^{r/q'}))^N$

Beweis: Der Fall N = 1 ist equ. 382 in Hardy-Littlewood-Pólya (1967). Die Reduktion des allgemeinen Falls auf den Fall N = 1 findet man bei du Plessis (1955), theorem 3. //

(3.13) Lemma und Definition: Sei $N = 3$ oder $N = 4$.

$\psi: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}_o^+$ sei meßbar und es sei $J := \int x_v^2 . \psi(x)\, dx^{2N} < \infty$.

Dann gilt:

(i) Ist $N = 3$ und $\psi \in L^{9/7}(\mathbb{R}^6)$, dann ist

$$\int |x_s - y_s|^{-1} . \psi(x) . \psi(y)\, dx^6\, dy^6 \leq \tilde{C}3 . \|\psi\|_{9/7}^{3/2} . J^{1/2}$$

mit $\tilde{C}3 := C_{6/5\ 6/5\ 1\ 3} \cdot (1 + (\omega_3/3)^{2/9})^2$

(ii) Ist $N = 4$ und $\psi \in L^2(\mathbb{R}^8)$, dann ist

$$2^{-1} . \int |x_s - y_s|^{-2} . \psi(x) . \psi(y)\, dx^8\, dy^8 \leq \tilde{C}4 . \|\psi\|_2 . J$$

mit $\tilde{C}4 := 2^{-1} . C_{4/3\ 4/3\ 2\ 4} \cdot (1 + (\omega_4/4)^{1/2})^2$

C3 bzw. C4 seien definiert als die kleinsten Konstanten, für die (i) bzw. (ii) richtig bleibt.

Beweis: Das Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz von (3.11) und (3.12):

(i) Man setze in (3.12) $N = 3$, $\lambda = 1$, $r = q = 6/5$ und in (3.11) $r = 6/5$, $p = 9/7$.

(ii) Man setze in (3.12) $N = 4$, $\lambda = 2$, $r = q = 4/3$ und in (3.11) $r = 4/3$, $p = 2$. //

(3.14) Satz: Sei $N = 3$ oder $N = 4$. $\varphi \geq 0$ erfülle

$\int x_v^2 . \varphi(x)\, dx^{2N} < \infty$. K erfülle (K1).

Ist $N = 4$ und $\gamma = -1$, so gelte zusätzlich $C4 . \|\varphi\|_2 < 1$.

Dann gibt es eine Funktion $f_{ke} \in C_+(\mathbb{R})$, die nur von φ und K abhängt, mit folgender Eigenschaft:
Ist $\varepsilon > 0$ und Φ die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$ oder $\varepsilon = 0$ und Φ eine Lösung von P^o auf I, die die Bedingung $(\Phi 1_o)$ auf I erfüllt, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in I$

$$[ke](t) = \int x_v^2 . \Phi(t,x)\, dx^{2N} \leq f_{ke}(t)$$

Ist $K \equiv 0$, so kann man f_{ke} als konstante Funktion wählen.

Beweis: Es sei daran erinnert, daß φ die Generalvoraussetzung $(\varphi 0)$ erfüllt, also $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ für jedes $p \in [1,\infty]$ gilt. Aus dem Energiesatz (3.8),(iii) folgt, daß für jedes $t \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in I$ gilt

$$[en](t) = [ke](t) + \int u^\varepsilon(x_s - y_s).\Phi(t,x).\Phi(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

$$+ 2.\int W(t,x_s).\Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

$$= [en](0) + 2.\int_o^t \int \dot{W}(r,x_s).\Phi(r,x)\, dx^{2N}\, dr \qquad (3.14.1)$$

Wir zeigen nun zunächst die Existenz einer Konstanten EN, die nur von φ und K abhängt, derart, daß
$[en](0) \leq EN$.
Ist $\gamma = -1$, so ist $u^\varepsilon < 0$ und daher

$$[en](0) \leq [ke](0) + 2.\int W(0,x_s).\varphi(x)\, dx^{2N} =: EN$$

Ist $\gamma = +1$, so ist $u^\varepsilon \leq u^o$ und daher

$$[en](0) \leq [ke](0) + 2.\int W(0,x_s).\varphi(x)\, dx^{2N}$$

$$+ \int u^o(x_s - y_s).\varphi(x).\varphi(y)\, dx^{2N}\, dy^{2N} =: EN$$

Nach Lemma (3.13) ist die rechte Seite endlich.

Im Falle $\gamma = +1$ folgt aus (3.14.1)

$$[ke](t) \leq EN - 2.\int W(t,x_s).\Phi(t,x)\ dx^{2N}$$

$$+ 2.\int_o^t\int \dot{W}(r,x_s).\Phi(r,x)\ dx^{2N}\ dr$$

$$\leq EN + (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m =: f_{ke}(t)$$

Im Falle $\gamma = -1$ und $N = 3$ folgt analog mit Lemma (3.13)

$$[ke](t) \leq EN + (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m$$

$$+ \int |x_s - y_s|^{-1}.\Phi(t,x).\Phi(t,y)\ dx^{2N}\ dy^{2N}$$

$$\leq EN + (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m + C3.\|\varphi\|_{9/7}^{3/2}.([ke](t))^{1/2}$$

Für festes t betrachten wir folgendes quadratisches Polynom

$$p(\alpha) := \alpha^2 - C3.\|\varphi\|_{9/7}^{3/2}.\alpha - EN - (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m$$

und α_+, seine nichtnegative Nullstelle.

Es gilt $p(([ke](t))^{1/2}) \leq 0$ und daher $[ke](t) \leq \alpha_+^2$

$$= ((1/2).C3.\|\varphi\|_{9/7}^{3/2} + (((1/2).C3.\|\varphi\|_{9/7}^{3/2})^2 + EN +$$

$$+ (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m)^{1/2})^2$$

$$=: f_{ke}(t)$$

Im Falle $\gamma = -1$ und $N = 4$ gilt analog

$$[ke](t) \leq EN + (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m + C4.\|\varphi\|_2.[ke](t), \text{ also}$$

$$[ke](t) \leq (1 - C_4.\|\varphi\|_2)^{-1}.(EN + (f_W(t) + |t|g_W(t)).2.m)$$

$$=: f_{ke}(t)$$

Damit ist alles gezeigt. //

(3.15) Satz: Sei $N = 3$ oder $N = 4$. K erfülle (K1).

$\varphi \geq 0$ erfülle (φ0) und es sei $\int x^2.\varphi(x)\, dx^{2N} < \infty$.

Ist $N = 4$ und $\gamma = -1$, so sei $C4.\|\varphi\|_2 < 1$.

Dann existiert eine globale schwache Lösung von P^o in folgendem Sinne:

Es gibt eine stetige Funktion $(t \mapsto \Phi^o(t,.))$ von $\mathbb{R}$ nach $L^1(\mathbb{R}^{2N})$, versehen mit der schwachen Topologie, derart, daß

(i) $\Phi^o(0,.) = \varphi$

$\Phi^o(t,.) \geq 0$ f.ü. für jedes $t \in \mathbb{R}$

$\Phi^o(t,.) \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$ und

$\|\Phi^o(t,.)\|_p \leq \|\varphi\|_p$

(ii) Es gibt ein $f_{ke} \in C_+(\mathbb{R})$ derart, daß für $t \in \mathbb{R}$

$$\int x_v^2.\Phi^o(t,x)\, dx^{2N} \leq f_{ke}(t)$$

(iii) Für jedes $\sigma \in C_c^1(\mathbb{R}^{2N})$ ist die Funktion

$$f(t) := \int \sigma(x).\Phi^o(t,x)\, dx^{2N} \text{ stetig differenzierbar auf } \mathbb{R} \text{ und}$$

$$f'(t) = \int (x_v.\frac{\partial}{\partial x_s}\sigma(x) + K(t,x_s).\frac{\partial}{\partial x_v}\sigma(x)).\Phi^o(t,x)\, dx^{2N}$$

$$+ \int (\frac{\partial}{\partial x_v}\sigma(x)).e^o(x_s - y_s).\Phi^o(t,x).\Phi^o(t,y)\, dx^{2N}\, dy^{2N}$$

(Die Existenz des rechten Integrals folgt aus (i),(ii) und den Lemmata (3.12) und (3.13).)

Beweis: Sei (ε_n) eine Nullfolge, $\varepsilon_n > 0$. Man zeigt völlig analog zu Arsen'ev (1975a), daß es eine Teilfolge (ε_n') von (ε_n) so gibt, daß die Lösungen $\Phi^{\varepsilon_n'}$ von $P^{\varepsilon_n'}$ auf $\mathbb{R}$ für jedes $T > 0$

in dem lokalkonvexen Raum $C([-T,T],(L^1(\mathbb{R}^{2N}),\text{schw. Topologie}))$ gegen eine schwache Lösung von P^o im obigen Sinne konvergieren. Neu zur Beweisidee von Arsen'ev kommt nur hinzu, daß auch im Fall $\gamma = -1$, den Arsen'ev nicht behandelt hat, die kinetischen Energien $\int x_v^2 . \Phi^{\varepsilon'_n}(t,x)$ unabhängig von n abgeschätzt werden können, also gerade die Aussage von Satz (3.14). //

Bemerkung: Arsen'ev betrachtet Systeme von zwei Gleichungen für zwei gesuchte Funktionen. Wenn man die eine Anfangsfunktion Null setzt, erhält man aber gerade die von uns betrachtete Gleichung.

Hauptthema der vorliegenden Arbeit sind klassische Lösungen von P^o. Die Behandlung schwacher Lösungen erfolgt mit ganz anderen Methoden und wir ewähnen sie deshalb nur am Rande.

§4 Lipschitzstetigkeit von $\Phi_\rho(t,.)$ und $E(t,.)$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß unter geeigneten Voraussetzungen aus dem Erfülltsein von $(\Phi 1_0)$ auf I die Lipschitzstetigkeit von $\Phi_\rho(t,.)$ und $E(t,.)$ auf I folgt.

In §4 ist $\varepsilon \geq 0$ fest und Φ ist eine Lösung von P^ε auf I, die die Bedingung $(\Phi 1_0)$ auf I erfüllt, d.h. es gibt ein $f_\Phi \in C_+(I)$ derart, daß für alle $t \in I$

$\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty \leq \||\Phi|_\rho(t,.)\|_\infty \leq f_\Phi(t)$.

φ und K erfüllen wie immer $(\varphi 0)$ und $(K0)$.

(4.1) Definition: Wir sagen Φ erfüllt $(\Phi 2)$ auf I, wenn es ein $g_\Phi \in C_+(I)$ gibt derart, daß für alle $t \in I$ $\Phi_\rho(t,.) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$ und $\mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)) \leq g_\Phi(t)$.

(4.2) Definition: Sei $k \geq 1 - N$. Wir sagen φ erfüllt $(\varphi 2_k)$, wenn φ stetig ist und es ein $h_k \in C_+(\mathbb{R}_0^+)$ gibt derart, daß für alle $b \geq 0$

$$\omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N+k-1} \cdot \sup\{|x-y|^{-1}|\varphi(x)-\varphi(y)| \mid x,y \in \mathbb{R}^{2N}, x \neq y, r-b \leq |x_v|, |y_v| \leq r+b\}\, dr \leq h_k(b)$$

(Der Integrand ist meßbar, vgl. die Bemerkung nach Definition (3.2).)

(4.3) Lemma: φ erfüllt $(\varphi 2_k)$, falls $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{2N})$ und

$$J := \int_0^\infty r^{N+k-1} \cdot \sup\{|x-y|^{-1}|\varphi(x)-\varphi(y)| \mid x,y \in \mathbb{R}^{2N}, x \neq y, r \leq |x_v|, |y_v| \leq 3r\}\, dr < \infty,$$

insbesondere also, wenn $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{2N})$ und es ein $P_o \geq 0$ gibt derart, daß $\varphi(x) = 0$ für $|x_v| \geq P_o$. (Diese Bedingung verwendet Batt (1977).)

Beweis: Wir verwenden genau die gleiche Idee wie beim Beweis von (3.4).

$$\int_0^\infty r^{N+k-1}.\sup\{|x-y|^{-1}|\varphi(x)-\varphi(y)| \mid x,y\in\mathbb{R}^{2N}, x\neq y, r-b\leq|x_v|,|y_v|\leq r+b\}\,dr$$

$$= \int_0^{2b}\ldots + \int_{2b}^\infty \ldots$$

$$\int_0^{2b}\ldots \leq \mathrm{lip}(\varphi).(N+k)^{-1}.(2b)^{N+k}$$

$$\int_{2b}^\infty \ldots = \int_b^\infty (r+b)^{N+k-1}.\sup\{\ldots\ r\leq|x_v|,|y_v|\leq r+2.b\}\,dr$$

$$\leq \int_b^\infty (2.r)^{N+k-1}.\sup\{\ldots\ r\leq|x_v|,|y_v|\leq 3.r\}\,dr$$

$$\leq 2^{N+k-1}.J$$

Also kann man setzen

$$h_k(b) = \omega_N.2^{N+k-1}(2.(N+k)^{-1}.\mathrm{lip}(\varphi).b^{N+k} + J) \quad //$$

(4.4) Lemma und Definition:

Φ erfülle $(\Phi 1_o)$ auf I und φ erfülle $(\varphi 2_o)$.

Dann erfüllt Φ auf I $(\Phi 2)$. Wenn man für $t \in I$ setzt

$$f_1(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} ||X_v(0,t,x)|-|x_v||$$

$g_1(t) = \mathrm{lip}(E(t,.))$, dann gilt:

(i) $\|E(t,.)\|_\infty \le J(N,N-1).m^{1/N}.(f_\Phi(t))^{1-1/N} + f_K(t) =: f_E(t)$

$f_1(t) \le \int_0^t f_E(r)\,dr =: \tilde{f}_1(t)$

(ii) $g_1(t) \le 2.f_\Phi(t) + g_K(t) =: \tilde{g}_1(t)$ für $N = 1$

$g_1(t) \le (1+\omega_N.(N^{-1}+N^2.\log(1+h_o(\tilde{f}_1(t)))).f_\Phi(t)+N^2.(\omega_N+m)+g_K(t)).$

$.\exp(N^2.\omega_N.t.f_\Phi(t)) =: \tilde{g}_1(t)$ für $N \ge 2$

(iii) $\mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)) \le g_\Phi(t) := \exp(\int_0^t (1+\tilde{g}_1(r))\,dr).h_o(\tilde{f}_1(t))$

Dies zeigt, daß wir g_Φ so wählen können, daß es nur von f_Φ, φ, K abhängt, aber nicht direkt von ε. Wenn wir also ein von ε unabhängiges f_Φ kennen, können wir auch ein von ε unabhängiges g_Φ angeben.

Beweis: (i) Wir erinnern daran, daß nach Lemma (3.3) gilt

$f_1(t) \le \int_0^t \|E(r,.)\|_\infty\,dr$

Aus Lemma (1.4) folgt

$\|E(t,.)\|_\infty \le J(N,N-1).\ m^{1/N}.\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty^{1-1/N} + f_K(t)$

Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Sei $g_1^*(t) := \sup_{0\le r\le t} g_1(r)$ für $t \in I$.

g_1 ist dann monoton, also meßbar, aber nicht notwendig ein Element von $C_+(I)$.

Sei $g^* \in C_+(I)$, $g^* \ge g_1^*$. Für $t,\tau \in I$, $0 \le \tau \le t$ und $x,y \in \mathbb{R}^{2N}$ gilt

$|X(t,\tau,x) - X(t,\tau,y)| =$

$= |x-y+\int_\tau^t (X_v(r,\tau,x)-X_v(r,\tau,y),E(r,X_s(r,\tau,x))-E(r,X_s(r,\tau,y)))\,dr|$

$$\leq |x-y| + \int_\tau^t (1+g^*(r)).|X(r,\tau,x) - X(r,\tau,y)|\, dr$$

Nach Lemma (1.2) gilt daher

$$|X(t,\tau,x) - X(t,\tau,y)| \leq |x-y|.\exp(|\int_\tau^t (1+g^*(r))\, dr|\ )$$

und dies zeigt man genauso für $0 \leq t \leq \tau$. Also ist

$$\mathrm{lip}(X(t,\tau,.)) \leq \exp(|\int_\tau^t (1+g^*(r))\, dr|)$$

Es gibt eine Folge in $C_+(I)$, die monoton fällt und fast überall auf I gegen g_1^* konvergiert. Es folgt

$$\mathrm{lip}(X(t,\tau,.)) \leq \exp\ (|\int_\tau^t (1+g_1^*(r))\, dr|), \text{ speziell}$$

$$\mathrm{lip}(X(0,t,.)) \leq \exp\ (\int_0^t (1+g_1^*(r))\, dr)$$

Seien nun $x_s, y_s \in \mathbb{R}^N$.

$$|\Phi_\rho(t,x_s) - \Phi_\rho(t,y_s)| \leq \int |\Phi(t,x_s,u) - \Phi(t,y_s,u)|\, du^N$$

$$\leq \omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N-1} \cdot \sup_{|u|=r} |\Phi(t,x_s,u) - \Phi(t,y_s,u)|\, dr$$

$$= \omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N-1} \cdot \sup_{|u|=r} |\varphi(X(0,t,x_s,u)) - \varphi(X(0,t,y_s,u))|\, dr$$

$$\leq \omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N-1} \cdot \sup_{|u|=r} \Big(\sup\{|z-w|^{-1} |\varphi(z)-\varphi(w)| \mid z,w \in \mathbb{R}^{2N}, z \neq w,$$

$$r-f_1(t) \leq |z_v|, |w_v| \leq r+f_1(t)\}.|X(0,t,x_s,u)-X(0,t,y_s,u)|\Big)\, dr$$

$\leq \mathrm{lip}(X(0,t,.)).h_0(f_1(t)).|x_s - y_s|$. Also gilt

$$\mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)) \leq \exp\Big(\int_0^t (1+g_1^*(r))\, dr\Big).h_0(\tilde{f}_1(t)) \qquad (4.4.1)$$

Ist N = 1, so folgt aus Lemma (1.5)

$$g_1(t) \leq 2.\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty + g_K(t) \leq 2.f_{\bar{\Phi}}(t) + g_K(t)$$

Ist $N \geq 2$, so folgt aus Lemma (1.5)

$$g_1(t) \leq \omega_N.(N^{-1} + N^2.\log(1+\mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)))).\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty + N^2.(\omega_N + m) + g_K(t)$$

Es ist aber

$$\log(1 + \mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)))$$

$$\leq \log(1 + h_o(\tilde{f}_1(t)).\exp(\int_0^t (1 + g_1^*(r))dr))$$

$$\leq \log(1 + h_o(\tilde{f}_1(t))) + \int_0^t (1 + g_1^*(r))dr$$

Für $0 \leq \tau \leq t$ gilt also

$$g_1(\tau) \leq \omega_N.(N^{-1} + N^2.\log(1 + h_o(\tilde{f}_1(t)))).f_\Phi(t) + N^2(\omega_N + m) + g_K(t) + N^2.\omega_N.f_\Phi(t).\int_0^\tau (1 + g_1^*(r))\,dr$$

Weil die rechte Seite für $\tau \in [0,t]$ monoton nicht fallend ist, gilt die Ungleichung auch, wenn wir die linke Seite durch $g_1^*(\tau)$ ersetzen. Wir addieren auf beiden Seiten 1. Mit Lemma (1.5) folgt

$$g_1(\tau) \leq 1 + g_1^*(\tau)$$

$$\leq (1 + \omega_N.(N^{-1} + N^2.\log(1 + h_o(\tilde{f}_1(t)))).f_\Phi(t) + N^2(\omega_N + m) + g_K(t)).\exp(N^2.\omega_N.f_\Phi(t).\tau)$$

Für $t = \tau$ folgt (ii).

(iii) folgt aus (ii) und (4.4.1) //

.

(4.5) Lemma: Φ erfülle $(\Phi 1_o)$ auf I und φ erfülle $(\varphi 2_o)$ und $(\varphi 2_1)$. Dann ist Φ_ρ gleichmäßig stetig auf jedem Streifen $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ mit $T \in I$.

Beweis: Seien $t,\tau \in I$ und $0 \leq \vartheta \leq t$.

$$|X_s(\vartheta,t,x) - X_s(\vartheta,\tau,x)|$$

$$= \left| \int_\vartheta^t (X_v(r,\tau,x) - X_v(r,t,x))\, dr - \int_\tau^t X_v(r,\tau,x)\, dr \right|$$

$$= \left| \int_\vartheta^t (X_v(r,\tau,x) - X_v(r,t,x))\, dr - (t-\tau).x_v \right.$$

$$\left. - \int_\tau^t \int_\tau^{r_1} E(r,X_s(r,\tau,x))\, dr\, dr_1 \right|$$

$$\leq \int_\vartheta^t |X_v(r,\tau,x) - X_v(r,t,x)|\, dr + |t-\tau|.|x_v|$$

$$+ (1/2).(t-\tau)^2.f_E(\max\{\tau,t\})$$

$$|X_v(\vartheta,t,x) - X_v(\vartheta,\tau,x)|$$

$$= \left| \int_\vartheta^t (E(r,X_s(r,\tau,x)) - E(r,X_s(r,t,x)))\, dr \right.$$

$$\left. - \int_\tau^t E(r,X_s(r,\tau,x))\, dr \right|$$

$$\leq \int_\vartheta^t \tilde{g}_1(r).|X_s(r,\tau,x) - X_s(r,t,x)|\, dr + |t-\tau|.f_E(\max\{\tau,t\})$$

Also gilt

$$|X(\vartheta,t,x) - X(\vartheta,\tau,x)|$$

$$\leq |t-\tau|.|x_v| + (|t-\tau| + (t-\tau)^2/2).f_E(\max\{\tau,t\})$$

$$+ 2^{1/2}.\int_\vartheta^t (1+\tilde{g}_1(r)).|X(r,t,x) - X(r,\tau,x)|\, dr$$

Mit Lemma (1.2) folgt

$$|X(\vartheta,t,x) - X(\vartheta,\tau,x)|$$

$$\leq \exp(2^{1/2}.\int_\vartheta^t (1+\tilde{g}_1(r))\, dr).$$

$$.(|t-\tau|.|x_v| + (|t-\tau| + (t-\tau)^2/2).f_E(\max\{\tau,t\}))$$

(Wir verwenden diese Ungleichung später nur für $\vartheta = 0$.)
Analog zur Argumentation im Beweis von Lemma (4.4) gilt

$$|\Phi_\rho(t,x_s) - \Phi_\rho(\tau,x_s)|$$

$$\leq \int |\varphi(X(0,t,x)) - \varphi(X(0,\tau,x))|\, dx_v^N$$

$$\leq \omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N-1} \cdot \sup_{|x_v|=r} \Big(\sup\{|y-w|^{-1} |\varphi(y)-\varphi(w)| \mid y,w\in\mathbb{R}^{2N}, y\neq w,$$
$$r-\max\{f_1(t),f_1(\tau)\} \leq |y_v|, |w_v| \leq r+\max\{f_1(t),f_1(\tau)\}\}$$
$$\cdot |X(0,t,x) - X(0,\tau,x)|\Big)\, dr$$

Wir setzen nun die oben erhaltene Abschätzung für $|X(0,t,x) - X(0,\tau,x)|$ ein und erhalten unter Berücksichtigung der Definition von h_o und h_1

$$|\Phi_\rho(t,x_s) - \Phi_\rho(t,y_s)|$$

$$\leq \exp(2^{1/2} \cdot \int_0^t (1 + \tilde{g}_1(r))\, dr) \cdot (|t-\tau| \cdot h_1(\max\{f_1(t),f_1(\tau)\}) +$$
$$+ (|t-\tau| + (t-\tau)^2/2) \cdot f_E(\max\{t,\tau\}) \cdot h_o(\max\{f_1(t),f_1(\tau)\})$$

Die gleichmäßige Stetigkeit von Φ_ρ auf $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ folgt aus dieser Ungleichung zusammen mit Lemma (4.4). //

(4.6) Lemma: Φ erfülle $(\Phi 1_o)$ auf I und φ erfülle $(\varphi 2_o)$ und $(\varphi 2_1)$. Dann sind die (nach Lemma (4.4) und Lemma (1.5) existierenden) partiellen Ableitungen

$$E_{oij}(t,x_s) := \frac{\partial}{\partial x_{s_i}} E_{oj}(t,x_s) \text{ stetig auf } I\times\mathbb{R}^N \text{ für } 1 \leq i,j \leq N.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $I = [0,T]$, $T > 0$. (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.) Nach Lemma (4.4) gibt es dann eine

Funktion $g_\Phi \in C_+(I)$ derart, daß

$\mathrm{lip}(\Phi_\rho(t,.)) \leq g_\Phi(t) \leq g_\Phi(T)$ für $t \in I$.

Wegen Lemma (4.5) ist Φ_ρ gleichmäßig stetig auf $I \times \mathbb{R}^N$.

Seien nun $t,\tau \in I$, $x_s, z_s \in \mathbb{R}^N$ und $d_2 > d_1 > 0$.

Aus Lemma (1.5) folgt

$$E_{oij}(t,x_s) - E_{oij}(\tau,z_s) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \text{ mit}$$

$$J_1 = \gamma.\omega_N.N^{-1}.\delta_{ij}.(\Phi_\rho(t,x_s) - \Phi_\rho(\tau,z_s))$$

$$J_2 = \int_{|y_s|\leq d_1} e_{ij}(y_s).(\Phi_\rho(t,x_s-y_s) - \Phi_\rho(t,x_s) - \Phi_\rho(\tau,z_s-y_s) + \Phi_\rho(\tau,z_s))\, dy_s^N$$

$$J_3 = \int_{d_1\leq|y_s|\leq d_2} e_{ij}(y_s).(\Phi_\rho(t,x_s-y_s) - \Phi_\rho(\tau,z_s-y_s))\, dy_s^N$$

$$J_4 = \int_{d_2\leq|y_s|} e_{ij}(y_s).(\Phi_\rho(t,x_s-y_s) - \Phi_\rho(\tau,z_s-y_s))\, dy_s^N$$

Es gilt

$$|J_2| \leq \int_{|y_s|\leq d_1} |e_{ij}(y_s)|.2.g_\Phi(T).|y_s|\, dy_s^N \leq 2.N.\omega_N.g_\Phi(T).d_1$$

$$|J_3| \leq \int_{d_1\leq|y_s|\leq d_2} N.|y_s|^{-N}\, dy_s^N \cdot \sup_{y_s\in\mathbb{R}^N} |\Phi_\rho(t,x_s-y_s)-\Phi_\rho(\tau,z_s-y_s)|$$

$$= N.\omega_N.\log(d_2/d_1). \sup_{y_s\in\mathbb{R}^N} |\Phi_\rho(t,x_s-y_s) - \Phi_\rho(\tau,z_s-y_s)|$$

$$|J_4| \leq N.d_2^{-N}.2.m$$

Wir können J_2 und J_4 durch geeignete Wahl von d_1 und d_2 beliebig klein machen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von Φ_ρ wird dann auch J_1 und J_3 beliebig klein, wenn wir (τ,z_s) genügend nahe bei (t,x_s) wählen. //

§5 Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß wir eine Lösung von P^0 durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ gewinnen können, wenn wir eine von ε unabhängige Schranke für die Funktionen $|\Phi^\varepsilon|_\rho(t,.)$ kennen. In den restlichen Abschnitten der Arbeit zeigen wir dann in wichtigen Spezialfällen, daß diese Bedingung erfüllt ist oder nicht erfüllt sein kann.

In §5 verwenden wir wieder die Bezeichnungen Φ^ε, E^ε und X^ε statt Φ, E und X, weil es nun auf die Abhängigkeit dieser Funktionen von ε ankommt. Dabei ist für $\varepsilon > 0$ Φ^ε die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$. Wie immer seien die Bedingungen ($\varphi 0$) und (K0) erfüllt.

(5.1) Definition: Wir sagen ($\Phi 1_0$) gilt ε-gleichmäßig auf I, wenn es ein $f_\Phi \in C_+(I)$ gibt derart, daß

$$|\Phi^\varepsilon|_\rho(t,x_s) \leq f_\Phi(t) \text{ für alle } \varepsilon > 0,\ t \in I,\ x_s \in \mathbb{R}^N$$

(5.2) Lemma: Sei $T > 0$, $I := [0,T]$.
$g: I\times I \to \mathbb{R}_0^+$ sei beschränkt auf I und für jedes $t \in I$ seien die Funktionen $g(t,.)$ und $g(.,t)$ meßbar.
Es gebe Konstanten D_1, D_2, D_3 derart, daß für $t,\tau \in I$

$$g(t,\tau) \leq \left| \int_\tau^t (D_1 . g(r,\tau) + D_2 . (g(0,r) + g(r,0)) + D_3)\, dr \right|$$

Dann gibt es eine Konstante D, die nur von D_1, D_2 und T abhängt, derart, daß

$$g(t,\tau) \leq D . D_3 \quad \text{für } t,\tau \in I.$$

Beweis: Sei $g^* \in C_+(I)$ mit $g^*(t) \geq \sup_{0\leq u\leq t} (g(0,u) + g(u,0))$

Für $\tau \leq t$ gilt dann

$$g(t,\tau) \leq \int_\tau^t (D_1.g(r,\tau) + D_2.g^*(r) + D_3)\, dr$$

Mit Lemma (1.2) folgt

$$g(t,\tau) \leq \int_\tau^t \exp((t-r).D_1).(D_2.g^*(r) + D_3)\, dr$$

$$\leq (\exp(T.D_1)).\left|\int_\tau^t (D_2.g^*(r) + D_3)\, dr\right|$$

und dies zeigt man analog für $t \leq \tau \leq T$.

Es gibt eine Folge in $C_+(I)$, die monoton fällt und fast überall auf I gegen $\sup_{0\leq u\leq t} (g(0,u) + g(u,0))$ konvergiert.

Somit gilt

$$g(t,\tau) \leq \left|\int_\tau^t \exp(T.D_1).(D_2.\sup_{0\leq u\leq r} (g(0,u) + g(u,0)) + D_3)\, dr\right|$$

Insbesondere also

$$g(0,t) + g(t,0)$$

$$\leq \int_0^t 2.\exp(T.D_1).(D_2.\sup_{0\leq u\leq r} (g(0,u) + g(u,0)) + D_3)\, dr$$

Weil die rechte Seite für $t \in I$ monoton nicht fallend ist, gilt die Ungleichung auch, wenn wir die linke Seite durch $\sup_{0\leq u\leq t} (g(0.u) + g(u,0))$ ersetzen. Eine erneute Anwendung von Lemma (1.2) ergibt

$$g(0,t) + g(t,0) \leq \sup_{0\leq u\leq t} (g(0,u) + g(u,0))$$

$$\leq \int_0^t (\exp((t-r).D_2.2.\exp(T.D_1)).2.\exp(T.D_1).D_3)\, dr$$

$$\leq T.\exp(T.D_2.2.\exp(T.D_1).2.\exp(T.D_1).D_3 =: D_4.D_3$$

Also gilt

$$g(t,\tau) \leq \left| \int_\tau^t (D_1 . g(r,\tau) + (1 + D_4).D_3)\, dr \right|$$

Lemma (1.2) zum dritten Mal angewendet ergibt

$$g(t,\tau) \leq \left| \int_\tau^t \exp(D_1 . (t-r)).(1 + D_4).D_3\, dr \right|$$

$$\leq T.\exp(D_1 . T).(1 + D_4).D_3 =: D.D_3 \quad //$$

(5.3) Satz: $(\Phi 1_0)$ gelte ε-gleichmäßig auf I. φ erfülle $(\varphi 2_0)$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung Φ^0 von P^0 auf I.
Ist zusätzlich φ stetig differenzierbar und erfüllt $(\varphi 2_1)$ und ist $K(t,x_s)$ stetig nach x_s differenzierbar, so ist Φ^0 stetig differenzierbar und genügt der partiellen Differentialgleichung (2.3.5).

Beweis: O.B.d.A. sei I = [0,T] mit T > 0: Eine eindeutige Lösung von P^0 auf I existiert genau dann, wenn es eine eindeutige Lösung auf jedem Teilintervall [0,T] von I gibt. Nach Voraussetzung existiert eine Konstante F_Φ derart, daß

$$|\Phi^\varepsilon|_\rho(t,x_s) \leq F_\Phi \text{ für alle } \varepsilon > 0,\ t \in I,\ x_s \in \mathbb{R}^N$$

Aus den Ergebnissen von §3 und §4 folgt die Existenz von Konstanten F_E, G_E, F_1, G_Φ derart, daß für $\varepsilon > 0$ und $t \in I$

$$\|E^\varepsilon(t,.)\|_\infty \leq F_E$$

$$\mathrm{lip}(E^\varepsilon(t,.)) \leq G_E$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2N}} \left| |X_v^\varepsilon(0,t,x)| - |x_v| \right| \leq F_1$$

$$\mathrm{lip}(\Phi_\rho^\varepsilon(t,.)) \leq G_\Phi$$

Seien nun $\varepsilon,\eta > 0$ fest und

$$f(t,\tau) := \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} |X^{\varepsilon}(t,\tau,x) - X^{\eta}(t,\tau,x)| \quad t,\tau \in I$$

f ist beschränkt auf I×I, denn $X^{\varepsilon}(t,\tau,x) - X^{\eta}(t,\tau,x)$

$$= \Big(\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{r_1} (E^{\varepsilon}(r,X_s^{\varepsilon}(r,\tau,x)) - E^{\eta}(r,X_s^{\eta}(r,\tau,x)))dr\, dr_1,$$

$$\int_{\tau}^{t} (E^{\varepsilon}(r,X_s(r,\tau,x)) - E^{\eta}(r,X_s(r,\tau,x)))dr \Big)$$

und E^{ε} und E^{η} sind beschränkt auf $I\times\mathbb{R}^N$.

Für jedes $t \in I$ sind $f(t,.)$ und $f(.,t)$ meßbar, weil X^{ε} und X^{η} stetig sind und es daher möglich ist, das Supremum bereits als Supremum von abzählbar vielen Funktionen zu berechnen.

1. Ungleichung: $\|\Phi_{\rho}^{\varepsilon}(t,.) - \Phi_{\rho}^{\eta}(t,.)\|_{\infty} \le h_o(F_1).f(0,t) \quad t \in I$

Beweis: Völlig analog zum Beweis von (4.4.1) gilt

$$|\Phi_{\rho}^{\varepsilon}(t,x_s) - \Phi_{\rho}^{\eta}(t,x_s)|$$

$$\le \omega_N \cdot \int_0^{\infty} r^{N-1} \cdot \sup_{|u|=r} \Big(\sup\{|z-w|^{-1}|\varphi(z)-\varphi(w)| \;\big|\; z,w\in\mathbb{R}^{2N}, z\neq w,$$

$$r-F_1 \le |z_v|, |w_v| \le r+F_1\}.|X^{\varepsilon}(0,t,x_s,u)-X^{\eta}(0,t,x_s,u)|\Big)\, dr$$

$$\le h_o(F_1). \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} |X^{\varepsilon}(0,t,x) - X^{\eta}(0,t,x)| = h_o(F_1).f(0,t)$$

2. Ungleichung: Es gibt Konstanten C_1, C_2, C_3, die nicht von ε und η abhängen, derart, daß für $t \in I$

$$\|E^{\varepsilon}(t,.) - E^{\eta}(t,.)\|_{\infty} \le C_1.f(0,t) + C_2.f(t,0) + C_3.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

Beweis: $E^{\varepsilon}(t,x_s) - E^{\eta}(t,x_s) = J_1 + J_2 + J_3$ mit

$$J_1 = \int (e^{\varepsilon}(x_s - y_s) - e^{\eta}(x_s - y_s)).\Phi_\rho^\varepsilon(t, y_s)\, dy_s^N$$

$$J_2 = \int e^{\eta,1}(x_s - y_s).(\Phi_\rho^\varepsilon(t, y_s) - \Phi_\rho^\eta(t, y_s))\, dy_s^N$$

$$J_3 = \int e^{\eta,2}(x_s - y_s).(\Phi_\rho^\varepsilon(t, y_s) - \Phi_\rho^\eta(t, y_s))\, dy_s^N$$

(Wir erinnern an die Definition von $e^{\eta,1}$ und $e^{\eta,2}$ in (1.7).)
Es gilt nach Lemma (1.6) und Lemma (1.4)

$$|J_1| \leq \int 2.N.|x_s - y_s|^{-N+1/2}.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|.|\Phi_\rho^\varepsilon(t, y_s)|\, dy_s^N$$

$$\leq 2.N.J(N, N-1/2).F_\Phi^{(N-1/2)/N}.m^{1/2N}.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

$$=: C_3.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

Ferner gilt

$$|J_2| = \left| \int (e^{\eta,1}(x_s - X_s^\varepsilon(t,0,y)) - e^{\eta,1}(x_s - X_s^\eta(t,0,y))).\varphi(y)\, dy^{2N} \right|$$

$$\leq m.\mathrm{lip}(e^{\eta,1}).f(t,0) \leq m.N^2.f(t,0) =: C_2.f(t,0)$$

Aus der 1. Ungleichung folgt

$$|J_3| \leq \|e^{\eta,2}\|_1.\|\Phi_\rho^\varepsilon(t,.) - \Phi_\rho^\eta(t,.)\|_\infty$$

$$\leq \omega_N.(N/N+1).h_0(F_1).f(0,t) =: C_1.f(0,t)$$

Damit ist die 2. Ungleichung bewiesen.

Bemerkung zum Beweis der 2. Ungleichung: Im Fall N = 1 gilt $e^{\eta,2} \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $\|e^{\eta,2}\|_\infty \leq 1$. In diesem Falle ist $|J_3| \leq \|\Phi^\varepsilon(t,.) - \Phi^\eta(t,.)\|_1$. Wir verfolgen diesen Gedanken nicht weiter, weil dies bereits bei Batt (1963b) geschehen ist. Dieser unterschiedliche Ansatz ist der Grund dafür, daß unsere Ergebnisse im eindimensionalen Fall sich von den Ergebnissen Batts unterscheiden.

3. Ungleichung: Für $t,\tau \in I$ gilt

$$f(t,\tau) \leq \left| \int_\tau^t ((1+G_E).f(r,\tau) + \max\{C_1,C_2\}.(f(0,r)+f(r,0)) + C_3|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|)\, dr \right|$$

Beweis: $|X^\varepsilon(t,\tau,x) - X^\eta(t,\tau,x)|$

$$= \left| \left(\int_\tau^t (X_v^\varepsilon(r,\tau,x) - X_v^\eta(r,\tau,x))\, dr\ , \int_\tau^t (E^\varepsilon(r,X_s^\varepsilon(r,\tau,x)) - E^\eta(r,X_s^\eta(r,\tau,x)))\, dr \right) \right|$$

$$\leq \left| \int_\tau^t f(r,\tau)\, dr \right| + \left| \int_\tau^t |E^\varepsilon(r,X_s^\varepsilon(r,\tau,x)) - E^\eta(r,X_s^\eta(r,\tau,x))|\, dr \right|$$

Es gilt aber

$$|E^\varepsilon(r,X_s^\varepsilon(r,\tau,x)) - E^\eta(r,X_s^\eta(r,\tau,x))|$$

$$\leq |E^\varepsilon(r,X_s^\varepsilon(r,\tau,x)) - E^\varepsilon(r,X_s^\eta(r,\tau,x))| + |E^\varepsilon(r,X_s^\eta(r,\tau,x)) - E^\eta(r,X_s^\eta(r,\tau,x))|$$

$$\leq G_E.f(r,\tau) + C_1.f(0,r) + C_2.f(r,0) + C_3.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

Damit ist die 3. Ungleichung bewiesen.

Aus der dritten Ungleichung und Lemma (5.2) folgt die Existenz einer Konstanten C, die nicht von ε und η abhängt, derart, daß

$f(t,\tau) \leq C.|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$. Somit ist $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ gleichmäßig konvergent auf $I\times I\times \mathbb{R}^{2N}$.

Wir unterbrechen den Gedankengang kurz, um folgendes zu bemerken: Wenn es eine Lösung Φ^o von P^o auf I gibt, können wir die gleiche Ungleichung für $\eta = 0$ beweisen. (Dabei müssen wir zunächst davon ausgehen, daß die Konstanten

F_Φ, F_E, G_E, F_1 und G_Φ eventuell größer gewählt werden müssen, es stellt sich aber nachträglich heraus, daß wir für Φ^o die gleichen Konstanten verwenden können.) Es folgt

$X^o(t,\tau,x) = \lim_{\varepsilon \to o} X^\varepsilon(t,\tau,x)$. Also ist X^o und damit auch

$\Phi^o(t,x) = \varphi(X^o(0,t,x))$ eindeutig bestimmt. Damit ist die Eindeutigkeitsaussage des Satzes bewiesen.

Wir führen die unterbrochenen Überlegungen fort:

Sei $X^o(t,\tau,x) := \lim_{\varepsilon \to o} X^\varepsilon(t,\tau,x)$

$\Phi^o(t,x) := \varphi(X^o(0,t,x)) \quad t,\tau \in I,\ x \in \mathbb{R}^{2N}$. Dann gilt

(i) X^o ist stetig auf $I\times I\times \mathbb{R}^{2N}$

(ii) $\sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} ||X_v^o(0,t,x)| - |x_v|| \le F_1$

Aus der zweiten Ungleichung folgt, daß E^ε gleichmäßig auf $I\times\mathbb{R}^N$ konvergiert. Sei also

$E^o(t,x_s) := \lim_{\varepsilon \to o} E^\varepsilon(t,x_s)$. Dann gilt

(iii) E^o ist stetig auf $I\times\mathbb{R}^N$

(iv) $E^o(t,.) \in L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ für $t \in I$ und

$\|E^o(t,.)\|_\infty \le F_E$, $\mathrm{lip}(E^o(t,.)) \le G_E$

(v) Im Fall $\varepsilon > 0$ gilt

$$X^\varepsilon(t,\tau,x) = x + \int_\tau^t (X_v^\varepsilon(r,\tau,x), E^\varepsilon(r, X_s^\varepsilon(r,\tau,x)))\, dr$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von X^ε und E^ε folgt, daß diese Gleichung auch für $\varepsilon = 0$ richtig bleibt. Also erfüllt X^o die Differentialgleichung (2.2.1) mit Anfangsbedingung (2.3.1).

Es folgt, daß $X^o(t,\tau,.)$ für jedes $t,\tau \in I$ ein maßerhaltender Homöomorphismus des $\mathbb{R}^{2N}$ ist. Also gilt

(vi) $\Phi^o(t,.) \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ für $t \in I$ und $\|\Phi^o(t,.)\|_1 = m$.

Insbesondere ist $\Phi^o_\rho(t,.)$ wohldefiniert und $\|\Phi^o_\rho(t,.)\|_1 \leq m$.

Die erste Ungleichung läßt sich jetzt analog für $\eta = 0$ beweisen. Es folgt:

Φ^ε_ρ konvergiert gleichmäßig auf $I\times\mathbb{R}^N$ gegen Φ^o_ρ. Also gilt

(vii) $\Phi^o_\rho(t,.) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$ für $t \in I$ und

$\| |\Phi^o|_\rho(t,.)\|_\infty \leq F_\Phi$, $\mathrm{lip}(\Phi^o_\rho(t,.)) \leq G_\Phi$.

Die zweite Ungleichung läßt sich jetzt analog für $\eta = 0$ beweisen. Es folgt

$E^\varepsilon(t,x_s)$ konvergiert gleichmäßig auf $I\times\mathbb{R}^N$ gegen

$\int e^o(x_s - y_s).\Phi^o(t,y)\, dy^{2N} + K(t,x_s)$. Daher gilt

(viii) $E^o(t,x_s) = \int e^o(x_s - y_s).\Phi^o(t,y)\, dy^{2N} + K(t,x_s)$.

Es folgt: Φ^o ist die Lösung von P^o auf I.

Sei nun $(\varphi 2_1)$ erfüllt. Aus Lemma (4.6) folgt

(ix) $E^o_o(t,x_s)$ ist stetig nach x_s differenzierbar.

Die restlichen Aussagen des Satzes folgen nun mit Lemma (2.3). //

In den folgenden drei Abschnitten untersuchen wir in verschiedenen Fällen, auf welchen Intervallen die Bedingung $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig erfüllt oder nicht erfüllt ist.

Dabei ist $\varepsilon > 0$ (oder, wenn angegeben $\varepsilon \geq 0$) fest und wir schreiben wieder Φ, E, X, e statt Φ^ε, E^ε, X^ε, e^ε. Für $\varepsilon > 0$ ist $\Phi = \Phi^\varepsilon$ die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$.
Wie immer seien $(\varphi 0)$ und $(K0)$ erfüllt.

§6 Schranken, die nicht von ε abhängen. Der allgemeine Fall.

In diesem Abschnitt untersuchen wir P^o ohne zusätzliche Symmetrievoraussetzungen an φ und K. In den Fällen N = 1 und N = 2 können wir globale Existenz von Lösungen zeigen, für $N \geq 3$ nur lokale. Zumindest für $N \geq 4$ lassen sich lokale Lösungen nicht immer zu globalen Lösungen fortsetzen. Im Fall N = 3, der wegen der möglichen Anwendungen in der Physik besonders wichtig ist, bleibt offen, ob es (unter geeigneten Voraussetzungen) immer globale klassische Lösungen gibt.

(6.1) Satz: φ erfülle $(\varphi 1_o)$. Dann gilt $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig auf I. Dabei ist I das Definitionsintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = (J(N,N-1).m^{1/N}.(c_o^1)^{(N-1)/N}).(y(t) + c_o^2)^{N-1} + f_K(t)$$
$$y(0) = 0,\ t \geq 0 \qquad (6.1.1)$$

Ist N = 1,2 , so ist $I = \mathbb{R}_o^+$, ist $N \geq 3$, so ist $I \subset \mathbb{R}_o^+$, z.B. gilt für $K \equiv 0$ $I = [0,T[$ mit

$$T = ((N-2).J(N,N-1).m^{1/N}.(c_o^1)^{(N-1)/N}.(c_o^2)^{N-2})^{-1} \quad (0^{-1} := \infty)$$

Wenn die Voraussetzungen von Satz (5.3) erfüllt sind, existiert dann eine eindeutige Lösung von P^o auf I.

Beweis: O.B.d.A. gelte nicht $\varphi = 0$ f.ü..

Dann gilt $C_o^1 \neq 0$ und $C_o^2 \neq 0$.

Aus Lemma (3.3) und Lemma (1.4) folgt

$$f_1(t) \leq \int_0^t \|E(r,.)\|_\infty \, dr$$

$$\|E(t,.)\|_\infty \leq J(N,N-1).m^{1/N}.\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty^{(N-1)/N}.m^{1/N} + f_K(t)$$

$$\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty \leq C_o^1.(f_1(t) + C_o^2)^N$$

Es folgt

$$f_1(t) \leq \int_0^t ((J(N,N-1).m^{1/N}.(C_o^1)^{(N-1)/N}.(f_1(r) + C_o^2)^{N-1}) + f_K(r)) \, dr$$

Wegen Lemma (1.2) ist also

$f_1(t) \leq y(t)$ $t \in I$, wobei

$y: I \to \mathbb{R}_o^+$ die maximale Lösung von (6.1.1) ist.

Im Fall $N = 1,2$ ist $I = \mathbb{R}_o^+$, im Fall $N = 3$ und $K \equiv 0$

(also $f_K = 0$) gilt

$$y(t) = ((2-N).J(N,N-1).m^{1/N}.(C_o^1)^{(N-1)/N}.t + (C_o^2)^{2-N})^{1/(2-N)} - C_o^2$$

und diese Funktion hat das angegebene Definitionsintervall //

(6.2) Satz: Im Fall $N \geq 4$, $\gamma = -1$, $\varepsilon = 0$, $K \equiv 0$ gilt:

Es gibt ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2N})$, $\varphi \geq 0$ derart, daß P^o eine lokale Lösung besitzt, die sich nicht zu einer globalen Lösung fortsetzen läßt.

Beweis: Korollar (3.9) und die Bemerkung dazu und Satz (6.1) //

§7 Der kugelsymmetrische Fall.

In diesem Abschnitt untersuchen wir 'kugelsymmetrische' Lösungen von P^{ε}. In verschiedenen Situationen zeigen wir die Existenz von globalen Lösungen von P^{o} oder zumindest die Existenz von Lösungen auf $\mathbb{R}^{+}_{o}$. Diese Existenzsätze sind Verallgemeinerungen der Ergebnisse von Batt (1977) und Strampp (1978a).

In §7 setzen wir $N \geq 3$ voraus. (Die Existenz von globalen Lösungen von P^{o} für $N = 1,2$ haben wir ja bereits bewiesen.)

(7.1) Definition:

$SO(N) := \{S: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \mid S \text{ ist linear und längentreu, det } S = +1\}$

Für $S \in SO(N)$ sei $S^* \in SO(2N)$ definiert durch

$S^*(x) := (S(x_s), S(x_v)) \quad x \in \mathbb{R}^{2N}$

Bemerkung: Weil wir Vektoren als Zeilen schreiben, identifizieren wir lineare Abbildungen nicht mit Matrizen.

(7.2) Definition und Lemma: Wir sagen

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ist s-symmetrisch, wenn für alle $S \in SO(N)$

$f \circ S = S$

$g: \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ ist s^*-symmetrisch, wenn für alle $S \in SO(N)$

$g \circ S^* = g$

$h: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist s_N-symmetrisch, wenn für alle $S \in SO(N)$

$h \circ S = S \circ h$

f ist genau dann s-symmetrisch, wenn es ein (notwendig eindeutiges) $\tilde{f}: \mathbb{R}^{+}_{o} \to \mathbb{R}$ gibt derart, daß

$f(z) = \tilde{f}(|z|)$ für $z \in \mathbb{R}^N$. (Beweis trivial)

(7.3) Lemma: Sei $N \geq 3$, $\varepsilon \geq 0$.

$\sigma \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ sei s-symmetrisch. Sei für $z \in \mathbb{R}^N$

$$\Sigma(z) := \begin{cases} \sigma(z) & \varepsilon = 0 \\ \omega_N^{-1}.N.\varepsilon. \int (|z-w|^2+\varepsilon)^{-(N+2)/2}.\sigma(w)\, dw^N & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Dann gilt $\Sigma \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, Σ ist s-symmetrisch und

$\|\Sigma\|_1 \leq \|\sigma\|_1$, $\|\Sigma\|_\infty \leq \|\sigma\|_\infty$.

$$U_o(z) := \int u(z-w).\sigma(w)\, dw^N$$

$$= -\gamma.\omega_N.\int_0^{|z|} r^{1-N}.\int_0^r r_1^{N-1}.\tilde{\Sigma}(r_1)\, dr_1\, dr + U_o(0)$$

und daher

$$E_o(z) := \int e(z-w).\sigma(w)\, dw^N = -\frac{\partial}{\partial z} U_o(z)$$

$$= \gamma.\omega_N\, |z|^{-N}.\int_0^{|z|} r^{N-1}.\tilde{\Sigma}(r)\, dr.z$$

E_o ist also s_N-symmetrisch. Es gilt ferner

$$\|U_o\|_\infty \leq \int |u(w)|.|\sigma(w)|\, dw^N$$

$$|E_o(z)| \leq \begin{cases} |z|^{1-N}.\|\sigma\|_1 \\ \int |w|^{1-N}.|\sigma(w)|\, dw^N \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R}^N$$

Beweis: O.B.d.A. sei $\sigma \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$. Der allgemeine Fall folgt dann mit einem Approximationsargument.

Im Fall $\varepsilon > 0$ ist Σ die Faltung von σ mit einer L^1-Funktion der Norm 1. (Vergleiche (1.5.1).) Daraus folgt

$\|\Sigma\|_1 \leq \|\sigma\|_1$, $\|\Sigma\|_\infty \leq \|\sigma\|_\infty$.

Σ und U_o sind als Faltung von s-symmetrischen Funktionen wieder s-symmetrisch.

Sei nun für $z \in \mathbb{R}^N$

$$d(z) := U_o(z) - U_o(0) + \gamma.\omega_N.\int_0^{|z|} r^{1-N}.\int_0^r r_1^{N-1}\Sigma(r_1)\,dr_1\,dr$$

Aus Lemma (1.5) und einer einfachen Rechnung folgt

$\Delta d = \gamma.\omega_N.(\Sigma - \Sigma) = 0.$

d ist s-symmetrisch und $d(0) = 0$, also ist $d \equiv 0$.

Wegen $\Delta_z \int |u(z-w).\sigma(w)|\,dw^N = \Delta_z \int \gamma.u(z-w).|\sigma(w)|\,dw^N$

$$= \begin{cases} -\omega_N.|\sigma(z)| & \varepsilon = 0 \\ -N.\varepsilon.\int (|z-w|^2+\varepsilon)^{-(N+2)/2}.|\sigma(w)|\,dw^N & \varepsilon > 0 \end{cases} \leq 0$$

folgt aus dem Maximumprinzip

$$|U_o(z)| \leq \int |u(z-w).\sigma(w)|\,dw^N \leq \int |u(w).\sigma(w)|\,dw^N$$

Ferner gilt

$$|E_o(z)| \leq |z|^{1-N}.\omega_N.\int_0^{|z|} r^{N-1}.|\tilde{\Sigma}(r)|\,dr$$

$$\leq |z|^{1-N}.\omega_N.\int_0^{\infty} r^{N-1}.|\tilde{\Sigma}(r)|\,dr = |z|^{1-N}.\|\Sigma\|_1 \leq |z|^{1-N}.\|\sigma\|_1 .$$

Sei nun zunächst $\varepsilon = 0$.

$$|E_o(z)| \leq |z|^{1-N}.\int_{|w|\leq|z|} |\sigma(w)|\,dw^N \leq \int |w|^{1-N}.|\sigma(w)|\,dw^N$$

Im Fall $\varepsilon > 0$ gilt

$$E_o(z) = \gamma.|z|^{-N}.z.\int_{|w|\leq|z|} \Sigma(w)\,dw^N$$

$$= \gamma.\int |z-w|^{-N}.(z-w).\Sigma(w)\,dw^N$$

$$= \gamma.\omega_N^{-1}.N.\varepsilon.\int |z-w|^{-N}(z-w).\int (|w-v|^2+\varepsilon)^{-(N+2)/2}.\sigma(v)\,dv^N\,dw^N$$

$$= \gamma \cdot \omega_N^{-1} . N . \varepsilon . \int (|z-w|^2 + \varepsilon)^{-(N+2)/2} . \int |w-v|^{-N} (w-v) . \sigma(v) \, dv^N \, dw^N$$

Aus dem Fall $\varepsilon = 0$ folgt, daß der Absolutbetrag des inneren Integrals abgeschätzt werden kann durch

$$\int |w|^{N-1} . |\sigma(w)| dw^N$$

Der Absolutbetrag des äußeren Integrals ist dann für jedes $z \in \mathbb{R}^N$ gleich Eins. Damit ist auch der Fall $\varepsilon > 0$ erledigt. //

(7.4) Lemma: Sei $\varepsilon > 0$. φ sei s^*-symmetrisch und $K(t,.)$ sei s_N-symmetrisch für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

(i) $\Phi(t,.)$ ist s^*-symmetrisch.

(ii) $\Phi_\rho(t,.)$ ist s-symmetrisch.

(iii) $E(t,.)$ ist s_N-symmetrisch.

Beweis: (i) Sei $S \in SO(N)$. Aus Lemma (2.5) folgt dann, daß $\Phi(t,S^*(x))$ eine Lösung von P^ε ist. Aus der Eindeutigkeit dieser Lösung folgt dann $\Phi(t,S^*(x)) = \Phi(t,x)$ für $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{2N}$.

(ii) folgt aus (i) und der Substitutionsregel für Integrale.

(iii) folgt aus (ii) und Lemma (7.3). //

(7.5) Satz: Sei $N \geq 3$, $\gamma = +1$. $\varphi \geq 0$ erfülle $(\varphi 1_0)$ und sei s^*-symmetrisch. Für $t \in \mathbb{R}$ und $x_s \in \mathbb{R}^N$ gelte $K(t,.)$ ist s_N-symmetrisch und $x_s . K(t,x_s) \geq 0$.

Ferner sei folgende Bedingung erfüllt:

$$\varphi(x) = 0 \text{ für } x_s . x_v \leq 0 \qquad (7.5.1)$$

Dann ist $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig auf $\mathbb{R}_o^+$ erfüllt.

Für die unter den Voraussetzungen von Satz (5.3) existierende Lösung Φ^o von P^o auf $\mathbb{R}_o^+$ gilt:

$\Phi^o(t,.)$ ist s^*-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}_o^+$.

Beweis: Aus Lemma (7.3) und (7.4) folgt

$$\|E_o(t,.)\|_\infty \leq \int |x_s|^{1-N}.\Phi(t,x)\, dx^{2N}$$

$$= \int |X_s(t,0,x)|^{1-N}.\varphi(x)\, dx^{2N} = \int_{x_s.x_v \geq 0} \dots\, dx^{2N}$$

Für $x_s.x_v \geq 0$ gilt aber

$$\frac{\partial}{\partial t} |X_s(t,0,x)|^2 = 2.X_s(t,0,x).X_v(t,0,x)$$

Für $t = 0$ ist dies $2.x_s.x_v \geq 0$

$$\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} |X_s(t,0,x)|^2$$

$$= 2.(|X_v(t,0,x)|^2 + X_s(t,0,x).E(t,X_s(t,0,x))) \geq 0,$$

denn aus Lemma (7.3) und der Voraussetzung $x_s.K(t,x_s) \geq 0$ folgt $x_s.E(t,x_s) = x_s.E_o(t,x_s) + x_s.K(t,x_s) \geq 0$ für $t \in \mathbb{R}, x_s \in \mathbb{R}^N$.

Also ist $|X_s(t,0,x))|^2$ nicht abnehmend auf $\mathbb{R}_o^+$ und daher $|X_s(t,0,x)|^{1-N}$ nicht zunehmend auf $\mathbb{R}_o^+$. Also gilt

$$\|E(t,.)\|_\infty \leq \|E_o(t,.)\|_\infty + f_K(t) \leq \int |x_s|^{1-N}.\varphi(x)\, dx^{2N} + f_K(t).$$

Die rechte Seite ist endlich wegen Lemma (1.4) und (3.3).

Diese Abschätzung gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}_o^+$.

Mit Lemma (3.3) folgt daraus, daß $(\Phi 1_o)$ auf $\mathbb{R}_o^+$ ε-gleichmäßig erfüllt ist. Unter den Voraussetzungen von Satz (5.3) ist $\Phi^o(t,.)$ s^*-symmetrisch als punktweiser Grenzwert von s^*-symmetrischen Funktionen. //

Bemerkungen: (i) Setzt man $\psi(x) := \varphi(x_s, -x_v)$, so erfüllt ψ nicht notwendig die Bedingung (7.5.1), wenn φ sie erfüllt. Deshalb können wir in der Situation von Satz (7.5) nicht einen Existenzsatz auf $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{R}^+_o$ beweisen. (7.5.1) ist aber die einzige in der vorliegenden Arbeit verwendete Bedingung an φ, die nicht automatisch auch von ψ erfüllt wird.

(ii) Wenn die Voraussetzungen von Satz (6.1) und Satz (7.5) erfüllt sind, folgt aber zumindest, daß $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig auf $]-T,\infty[$ mit geeignetem $T > 0$ gilt.

(iii) Die Bedingung (7.5.1) verwendet Strampp (1978a) im Fall $N = 3$. Wie wir zeigen werden, kommt man in diesem Fall aber noch ohne sie aus (vgl. Satz (7.7)).

(7.6) Lemma: Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$ und $I := [0,T]$ mit $T > 0$. $P: I \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und es gelte $|P''(t)| \leq g(P(t))$ für $t \in I$.
Dann gilt für $t \in I$
$$||P'(t)|^2 - |P'(0)|^2| \leq 2.\|g\|_1 .$$

Beweis: Sei $t_1 \in I$. Wir zeigen nur
$$|P'(t_1)|^2 \leq |P'(0)|^2 + 2.\|g\|_1 \qquad (7.6.1)$$
Die volle Behauptung folgt durch Anwendung dieses Resultats auf die Funktion $Q(t) := P(t_1 - t)$, $t \in [0,t_1]$.

1. Fall: $P'(t_1) = 0$. Dann ist (7.6.1) offenbar richtig.

2. Fall: $P'(t_1) \neq 0$. Sei
$$t_2 := \inf\{t \in [0,t_1] \mid P'|_{]t,t_1[} \neq 0 \text{ überall}\}.$$

Dann ist $t_2 = 0$ oder $P'(t_2) = 0$, in jedem Fall gilt also $|P'(t_2)|^2 \leq |P'(0)|^2$. Es folgt

$$|P'(t_1)|^2 = |P'(t_2)|^2 + \int_{t_2}^{t_1} 2.P'(t).P''(t)\,dt$$

$$\leq |P'(0)|^2 + \int_{t_2}^{t_1} 2.|P'(t)|.g(P(t))\,dt$$

$$= |P'(0)|^2 + 2. \int_{P([t_1,t_2])} g(r)\,dr \leq |P'(0)|^2 + 2.\|g\|_1 \quad //$$

(7.7) Satz: Sei $N = 3$ oder $N = 4$. φ sei s^*-symmetrisch und erfülle $(\varphi 1_0)$. $K(t,.)$ sei s_N-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$ und es gebe ein $h_K \in C_+(\mathbb{R})$ derart, daß für $t \in \mathbb{R}$, $x_s \in \mathbb{R}^N$

$|K(t,x_s)| \leq h_K(t).|x_s|^{1-N}$.

Ist $N = 4$, so gelte zusätzlich

$C_o^1.2^{10}.3^{-2}.(J(4,3).m^{1/4})^{4/3}.(m + h_K(t))^{2/3} < 1$ für $t \in \mathbb{R}$,

oder die Voraussetzungen von Satz (3.14) seien erfüllt. Dann gilt $(\Phi 1_0)$ ε-gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Unter den Voraussetzungen von Satz (5.3) existiert dann also eine globale Lösung Φ^o von P^o. $\Phi^o(t,.)$ ist s^*-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Vorbemerkung: Wir werden im Beweis Lemma (7.6) anwenden. Dabei wird folgende Funktion benützt:
$g(r) = \min\{A, B.|r|^{1-N}\}$, $r \in \mathbb{R}$ mit $A,B \geq 0$.
Wie man leicht nachrechnet, ist $2.\|g\|_1 = C.A^{\alpha}.B^{\beta}$ mit
$C := 4.(N-1)/(N-2)$, $\alpha := (N-2)/(N-1)$, $\beta := 1/(N-1)$.

Es genügt wieder nachzuweisen, daß $(\Phi 1_0)$ ε-gleichmäßig auf $I := [0,T]$ mit $T > 0$ erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$ fest und $\Phi = \Phi^\varepsilon$ die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$. $\Phi(t,.)$ ist s^*-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$.

Sei $F_K := f_K(T)$. $H_K := h_K(T)$,

$$F_\Phi := \sup_{0\le t\le T} \| |\Phi|_\rho(t,.)\|_\infty .$$

F_Φ ist endlich wegen Lemma (3.3).

Aus Lemma (1.4) folgt für $t \in I$

$$\|E(t,.)\|_\infty \le J(N,N-1).m^{1/N}.F_\Phi^{1-1/N} + F_K =: A$$

und aus Lemma (7.3)

$$|E(t,x_s)| \le (m + H_K).|x_s|^{1-N} =: B.|x_s|^{1-N}$$

Sei $j \in \{1,2,\dots,N\}$ und $x \in \mathbb{R}^{2N}$. Die Funktion

$P_j(t) := X_j(t,0,x)$ erfüllt dann

$|P_j''(t)| \le g(P_j(t))$ mit dem oben betrachteten g.

Es folgt für jedes j und x und jedes $t \in I$

$$\big||P_j'(t)|^2 - |P_j'(0)|^2\big| = \big||X_{N+j}(t,0,x)|^2 - |x_{N+j}|^2\big|$$

$\le C.A^\alpha.B^\beta$ und daher

$$(f_1(t))^2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} \big||X_\nu(t,0,x)| - |x_\nu|\big|^2$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} \big||X_\nu(t,0,x)|^2 - |x_\nu|^2\big| \le N.C.A^\alpha.B^\beta.$$

Wegen Lemma (3.3) gilt dann

$$F_\Phi \le C_o^1.((N.C.A^\alpha.B^\beta)^{1/2} + C_o^2)^N \qquad (7.7.1)$$

$$= C_o^1.((4.N.(N-1)/(N-2))^{1/2}.(J(N,N-1).m^{1/N}.F_\Phi^{1-1/N} + F_K)^{(N-2)/(2N-2)}.$$
$$.(m + H_K)^{1/(2.(N-1))} + C_o^2)^N$$

Die rechte Seite - aufgefaßt als Funktion von F_Φ - wächst für $F_\Phi \to \infty$ wie

$$C_o^1.(4.N.(N-1)/(N-2))^{N/2}.(J(N,N-1).m^{1/N})^{N.(N-2)/(2.(N-1))}.$$
$$.(m+H_K)^{N/(2.(N-1))}.F_\Phi{}^{(N-2)/2} + o(F_\Phi{}^{(N-2)/2}) \qquad (7.7.2)$$

Ist $N = 3$, so gilt $(N-2)/2 = 1/2$ und aus (7.7.1) folgt, daß F_Φ eine nur von φ und K aber nicht von ε abhängige Schranke nicht überschreiten kann.

Ist $N = 4$, so gilt $(N-2)/2 = 1$ und die gleiche Aussage ist wahr, wenn der Faktor vor F_Φ kleiner als 1 ist.

In beiden Fällen ist damit nachgewiesen, daß die Bedingung $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig auf I gilt.

Ist $N = 4$ und sind die Voraussetzungen von Satz (3.14) erfüllt, dann führt eine kleine Modifikation der obigen Argumentation zum Ziel:

Es gibt eine Konstante F_{ke} derart, daß für alle $\varepsilon > 0$, $t \in I$

$[ke](t) \leq F_{ke}$

Aus Lemma (3.11) folgt, daß

$$\|\Phi_\rho(t,.)\|_{3/2} \leq (1+\omega_4/4).\|\varphi\|_\infty^{1/3}.F_{ke}{}^{2/3} =: D_1$$

Völlig analog zu Lemma (1.4) gilt

$$\|E_o(t,.)\|_\infty \leq D_2.\|\Phi_\rho(t,.)\|_{3/2}^{3/8}.\|\Phi_\rho(t,.)\|_\infty^{5/8}$$

mit einer Konstanten D_2, die dem $J(N,\alpha)$ aus (1.4) entspricht.

Also ist

$$\|E(t,.)\|_\infty \leq D_2.D_1{}^{3/8}.F_\Phi{}^{5/8} + F_K =: A$$

Das neu definierte A enthält den Faktor F_Φ also mit einem kleineren Exponenten als das oben verwendete A, nämlich mit 5/8 statt 3/4. Wenn wir jetzt wieder den gleichen Gedankengang wie vorher durchführen, ist der Exponent von F_Φ im Analogon zu (7.7.2) 5/6 statt 1 und es folgt wieder die Existenz einer von ε unabhängigen Schranke für F_Φ.

Sind die Voraussetzungen von Satz (5.3) erfüllt, so ist $\Phi^o(t,.)$ s^*-symmetrisch als punktweiser Grenzwert von s^*-symmetrischen Funktionen. //

Bemerkungen: (i) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von Batt (1977). Die Beweismethode ist im wesentlichen die gleiche.

(ii) Beim Beweis von Satz (7.7) wird deutlich, warum wir die Funkton f_1 eingeführt haben: Lemma (7.6) liefert nämlich gerade eine Abschätzung für f_1. Einer ähnlichen Situation werden wir in Lemma (8.1) begegnen.

(7.8) Satz: Im Fall $N = 4$, $\varepsilon = 0$, $K \equiv 0$ gilt:
Es gibt ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^8)$, $\varphi \geq 0$ derart, daß P^o für $\gamma = +1$ eine globale Lösung besitzt, hingegen für $\gamma = -1$ nur eine lokale Lösung.

Beweis: Man wähle das φ aus Satz (6.2) s^*-symmetrisch, z.B. $\varphi(x) = f(x^2)$ mit $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$.
Im Falle $\gamma = +1$ folgt die Existenz einer globalen Lösung von P^o aus Satz (3.14) und Satz (7.7).
Im Falle $\gamma = -1$ folgt die Nichtexistenz einer globalen Lösung aus Satz (6.2). ///

Bemerkungen: (i) Die Kugelsymmetrie wird nur an einer Stelle entscheidend verwendet, nämlich beim Beweis von Lemma (7.3), das uns a-priori-Abschätzungen für die Kraft E_o liefert.

(ii) Alle Voraussetzungen von Satz (7.7) und Satz (5.3) sind z.B. in dem in der Stellardynamik betrachteten Fall $K \equiv 0$ erfüllt, wenn $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^6)$ so beschaffen ist, daß es ein stetig differenzierbares $\varphi_1 : \mathbb{R}_o^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(x) = \varphi_1(|x_s|^2, x_s \cdot x_v, |x_v|^2)$.

(iii) Die kugelsymmetrischen Lösungen von P^o beschreiben "Kugelsternhaufen": Die räumliche Dichte $\Phi_\rho^o(t,.)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ konstant auf den konzentrischen Kugelschalen um den Koordinatenursprung.

§8 Der rotationssymmetrische Fall

In diesem Abschnitt zeigen wir für $N = 3$ die globale Existenz von Lösungen von P^0 in der Situation, daß $\varphi \geq 0$ rotationssymmetrisch ist und eine Drehimpulsbedingung erfüllt.

$\Phi = \Phi^\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ fest) sei wie immer die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$.

Wir beginnen mit einem Lemma, das noch keine Symmetrie-voraussetzung erfordert, aber nur in §8 angewendet wird.

(8.1) Lemma: Sei $\varepsilon > 0$ fest, $N \geq 3$. φ erfülle $\int |x_v| . |\varphi(x)| \, dx^{2N} < \infty$. K erfülle (K1). Dann gilt

(i) $U_0(t,x_s) = \int u(x_s - y_s).\Phi(t,y) \, dy^{2N}$ ist auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ stetig nach t differenzierbar mit

$\dot{U}_0(t,x_s) := \frac{\partial}{\partial t} U_0(t,x_s) = \int e(x_s - y_s).y_v \, \Phi(t,y) \, dy^{2N}$, also ist

$$\|\dot{U}_0(t,.)\|_\infty \leq \sup_{x_s \in \mathbb{R}^N} \int (|x_s - y_s|^2 + \varepsilon)^{(N-1)/2} . |y_v| . |\Phi(t,y)| dy^{2N}$$

Somit ist auch $U(t,x_s) = U_0(t,x_s) + W(t,x_s)$ stetig nach t differenzierbar und $\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{W}$.

(ii) Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{2N}$ gilt

$$|X_v(t,0,x)|^2 - |x_v|^2 = 2.(U(0,x_s) - U(0,X_s(t,0,x)))$$
$$+ 2. \int_0^t (\dot{U}(r,X_s(r,0,x)) - \dot{U}(r,X_s(t,0,x))) \, dr$$

(iii) Es folgt für $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$(f_1(t))^2 \leq 4.\|U(0,.)\|_\infty + 4. \int_0^t g_w(r) + \|\dot{U}_0(r,.)\|_\infty \, dr$$

Beweis: (i) Nach Lemma (2.3) gilt

$$U_o(t,x_s) = \int u(x_s - X_s(t,0,y)).\varphi(y)\, dy^{2N}$$

$$|\frac{\partial}{\partial t} u(x_s - X_s(t,0,y))| = |e(x_s - X_s(t,0,y)).X_v(t,0,y)|$$

$$\leq \varepsilon^{(1-N)/2}(|y_v| + |t|.f_E(t))$$

Also ist nach Lemma (1.3) U_o nach t differenzierbar und

$$\dot{U}_o(t,x_s) = \int e(x_s - X_s(t,0,y)).X_v(t,0,y)\ \varphi(y)\, dy^{2N}$$

$$= \int e(x_s - y_s).y_v\ \Phi(t,y)\, dy^{2N}$$

(ii) Es gilt

$$|X_v(t,0,x)|^2 - |x_v|^2$$

$$= 2.(U(0,x_s) - U(t,X_s(t,0,x))) + 2.\int_0^t \dot{U}(r,X_s(r,0,x))\, dr,$$

denn für t = 0 stimmen beide Seiten überein und ihre Ableitungen nach t sind gleich. Ferner ist

$$U(t,X_s(t,0,x)) = U(0,X_s(t,0,x)) + \int_0^t \dot{U}(r,X_s(t,0,x))\, dr$$

Daraus folgt (ii).

(iii) $$(f_1(t))^2 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^{2N}} ||X_v(t,0,x)|^2 - |x_v|^2|$$

Mit (ii) folgt die Behauptung. //

Im Rest dieses Abschnitts beschäftigen wir uns nur noch mit dem Fall N = 3.

(8.2) Definition: Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $w = (w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{R}^3$ sei

$Z_\vartheta(w) := (w_1.\cos(\vartheta) + w_2.\sin(\vartheta), -w_1.\sin(\vartheta) + w_2.\cos(\vartheta), w_3)$.

$ZO := \{Z_\vartheta \mid \vartheta \in \mathbb{R}\} \subset SO(3)$, also ist für $Z \in ZO$ wohldefiniert, was $Z^* \in SO(6)$ ist.

(8.3) Definition und Lemma: Wir sagen

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist z-symmetrisch, wenn für alle $Z \in ZO$

$f \circ Z = f$

$g:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ ist z^*-symmetrisch, wenn für alle $Z \in ZO$

$g \circ Z^* = g$

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist z_3-symmetrisch, wenn für alle $Z \in ZO$

$h \circ Z = Z \circ h$

$h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist speziell z_3-symmetrisch, wenn h z_3-symmetrisch ist und es ein z-symmetrisches $\bar{h}$ gibt derart, daß

$(h_1(w),h_2(w)) = \bar{h}(w).(w_1,w_2)$ für $w \in \mathbb{R}^3$.

f ist genau dann z-symmetrisch, wenn es ein (notwendig eindeutiges) $\hat{f}:\mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}$ gibt derart, daß für $w \in \mathbb{R}^3$

$f(w) = \hat{f}(|(w_1,w_2)|,w_3)$. (Beweis trivial)

Bemerkung: Die Funktion $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$h(w) := (w_2,-w_1,w_3) = Z_{\pi/2}(w)$ für $w \in \mathbb{R}^3$

ist z_3-symmetrisch aber nicht speziell z_3-symmetrisch.

Im folgenden Lemma zeigen wir, daß zwei verschiedene Integraloperatoren auf den z_3-symmetrischen Funktionen übereinstimmen.

(8.4) Lemma: $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ sei z-symmetrisch, $\varepsilon \geq 0$. Dann gilt

$$f(w) := \int (|w-w'|^2+\varepsilon)^{-1}.\sigma(w')\,dw'^3 \qquad (8.4.1)$$

$$= \int (|r+r'|^2 + |w_3-w_3'|^2+\varepsilon)^{-1/2}.(|r-r'|^2 + |w_3-w_3'|^2+\varepsilon)^{-1/2}\sigma(w')\,dw'^3$$

für $w \in \mathbb{R}^3$, $r := |(w_1,w_2)|$, $r' := |(w_1',w_2')|$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß für $b > c \geq 0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (b - c.\cos(r))^{-1}\,dr = 2.\pi.(b^2-c^2)^{-1/2} \qquad (8.4.2)$$

(Stammfunktion $2.(b^2-c^2)^{-1/2}.\arctan((b^2-c^2)^{-1/2}(b+c).\tan(r/2))$)

Für $b = c$ divergiert das Integral, und die Gleichung bleibt formal richtig.

f ist z-symmetrisch als Faltung von z-symmetrischen Funktionen. Daher gilt

$$f(w) = f(r,0,w_3) = (2.\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{+\pi} f(Z_\vartheta(r,0,w_3))\,d\vartheta$$

$$= (2.\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{+\pi}\int (|Z_\vartheta(r,0,w_3)-w'|^2+\varepsilon)^{-1}.\sigma(w')\,dw'^3\,d\vartheta$$

$$= (2.\pi)^{-1}.\int\int_{-\pi}^{+\pi}\ldots\,d\vartheta\,dw'^3$$

Wir berechnen zunächst das innere Integral: Es gibt $\vartheta' \in \mathbb{R}$ mit $w' = Z_{\vartheta'}(r',0,w_3')$, also ist das innere Integral gleich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (|Z_\vartheta(r,0,w_3) - Z_{\vartheta'}(r'.0,w_3')|^2+\varepsilon)^{-1}\,d\vartheta$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (|Z_{\vartheta-\vartheta'}(r,0,w_3) - (r',0,w_3')|^2+\varepsilon)^{-1}\,d\vartheta$$

($Z_{\vartheta'}$ ist längentreu und $Z_{\vartheta+\tau} = Z_\vartheta \circ Z_\tau$ für $\vartheta,\tau \in \mathbb{R}$.)

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (|Z_\vartheta(r,0,w_3) - (r',0,w_3')|^2 + \varepsilon)^{-1} \, d\vartheta$$

(Integral über eine Periode)

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (|r.\cos(\vartheta) - r'|^2 + r^2(\sin(\vartheta))^2 + |w_3 - w_3'|^2 + \varepsilon)^{-1} \, d\vartheta$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (r^2 + r'^2 - 2.r.r'.\cos(\vartheta) + |w_3 - w_3'|^2 + \varepsilon)^{-1} \, d\vartheta$$

$= 2.\pi.((r^2 + r'^2 + |w_3 - w_3'|^2 + \varepsilon)^2 - (2.r.r')^2)^{-1/2}$ wegen (8.4.2)

$= 2.\pi.(|r + r'|^2 + |w_3 - w_3'|^2 + \varepsilon)^{-1/2}.(|r - r'|^2 + |w_3 - w_3'|^2 + \varepsilon)^{-1/2}$

Durch Einsetzen in das äußere Integral folgt die Behauptung. //

(8.5) Lemma: Sei $\varepsilon > 0$. φ sei z^*-symmetrisch und $K(t,.)$ sei z_3-symmetrisch für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

(i) $\Phi(t,.)$ ist z^*-symmetrisch.

(ii) $\Phi_\rho(t,.)$ ist z-symmetrisch.

(iii) $E_0(t,.)$ ist speziell z_3-symmetrisch und $E(t,.)$ ist z_3-symmetrisch.
$E(t,.)$ ist speziell z_3-symmetrisch, wenn es $K(t,.)$ ist.

(iv) Erfüllt φ ($\varphi 1_1$), so ist die Abbildung

$$x_s \mapsto \int |x_v|.|\Phi(t,x)| \, dx_v^N \text{ z-symmetrisch}$$

(v) Ist $K(r,.)$ speziell z_3-symmetrisch für alle $r \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^6$

$$X_1(t,\tau,x).X_5(t,\tau,x) - X_2(t,\tau,x).X_4(t,\tau,x) = x_1.x_5 - x_2.x_4 \, .$$

Beweis: (i) analog zum Beweis von (7.4),(i)

(ii) und (iv) folgen aus (i) und der Substitutionsregel für Integrale.

(iii) $U_o(t,.)$ ist z-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$ als Faltung von zwei z-symmetrischen Funktionen. Daraus folgt mit der Kettenregel, daß $E_o(t,.) = \frac{\partial}{\partial x_s} U_o(t,.)$ z_3-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$ ist. Wegen Lemma (8.3) gilt $U_o(t,x_s) = U_o(t,|(x_1,x_2)|,0,x_3)$. Wieder mit der Kettenregel folgt für $|(x_1,x_2)| \neq 0$, daß

$$(E_{o1}(t,x_s),E_{o2}(t,x_s)) = |(x_1,x_2)|^{-1}.E_{o1}(t,|(x_1,x_2)|,0,x_3).(x_1,x_2).$$

Aus der z_3-Symmetrie von $E_o(t,.)$ folgt ferner

$$(E_{o1}(t,0,0,x_3),E_{o2}(t,0,0,x_3))$$
$$= (E_{o1}(t,Z_\pi(0,0,x_3)),E_{o2}(t,Z_\pi(0,0,x_3)))$$
$$= (Z_\pi(E_o(t,0,0,x_3))_1,Z_\pi(E_o(t,0,0,x_3))_2)$$
$$= -(E_{o1}(t,0,0,x_3),E_{o2}(t,0,0,x_3)),$$ also verschwindet dieser Ausdruck. Damit ist die spezielle z_3-Symmetrie von $E_o(t,.)$ gezeigt. Ist $K(t,.)$ speziell z_3-symmetrisch, so ist es auch $E(t,.) = E_o(t,.) + K(t,.)$

(v) Wegen (iii) ist $E(r,.)$ speziell z_3-symmetrisch für $r \in \mathbb{R}$. Die Aussage ist richtig für $t = \tau$. Die Ableitung der linken Seite nach t ist

$$X_1(t,\tau,x).E_2(t,X_s(t,\tau,x)) - X_2(t,\tau,x).E_1(t,\tau,x)) = 0 \quad //$$

Teil (v) dieses Lemmas motiviert folgende Definition:

(8.6) Definition: Sei $N = 3$ und $\delta > 0$. Wir sagen φ erfüllt $(\varphi 3_\delta)$, falls

$\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^6$ mit $|x_1.x_5 - x_2.x_4| \leq \delta$.

(8.7) Lemma: Seien $\varepsilon,\delta > 0$. φ erfülle $(\varphi 3_8)$ und sei z^*-symmetrisch. $K(t,.)$ sei speziell z_3-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$

(i) $\Phi(t,x) = 0$ für $|x_1.x_5 - x_2.x_4| \leq \delta$, $x \in \mathbb{R}^6$.

(ii) $\Phi(t,x) = 0$ für $|(x_1,x_2)|^{-1} \geq \delta^{-1}.|(x_4,x_5)|$. (8.7.1)

Beweis: (i) $\Phi(t,x) = \varphi(X(0,t,x))$

Ist $|x_1.x_5 - x_2.x_4| \leq \delta$, so ist nach (8.5),(v)

$|X_1(0,t,x).X_5(0,t,x) - X_2(0,t,x).X_4(0,t,x)| \leq \delta$, also

$\Phi(t,x) = 0$.

(ii) folgt aus (i) und $|x_1.x_5 - x_2.x_4| \leq |(x_1,x_2)|.|(x_4,x_5)|$. //

Um den Beweis des folgenden Satzes von umständlichen Rechnungen freizuhalten, schätzen wir zunächst ein Integral ab:

(8.8) Lemma: Für $z \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ gilt

$$J := \int\limits_{|r-r'|^2+|z_3-w_3|^2 \leq R^2} r'^{-1}.(|r-r'|^2+|z_3-w_3|^2)^{-1/2}\, dw^3 \leq \omega_2^2.R$$

Dabei sei $r := |(z_1,z_2)|$, $r' := |(w_1,w_2)|$.

Beweis: Wir berechnen das Integral über die (w_1,w_2)-Ebene mit Mittelpunkt $(0,0)$ in Polarkoordinaten und erhalten

$$J = \omega_2 \cdot \int\limits_{\substack{|r-r'|^2+|z_3-w_3|^2 \leq R^2 \\ r' \geq 0, w_3 \in \mathbb{R}}} (|r-r'|^2+|z_3-w_3|^2)^{-1/2}\, dr'\, dw_3$$

$$\leq \omega_2 \cdot \int\limits_{\substack{|r-r'|^2+|z_3-w_3|^2 \leq R^2 \\ r', w_3 \in \mathbb{R}}} \ldots\, dr'\, dw_3$$

Das Integral über die (r',w_3)-Ebene mit Mittelpunkt (r,z_3) berechnen wir ebenfalls in Polarkoordinaten und erhalten

$$J \leq \omega_2{}^2 . \int_0^R dr = \omega_2{}^2 . R \quad //$$

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit:

(8.9) Satz: Sei $N = 3$, $\delta > 0$. $\varphi \geq 0$ erfülle $(\varphi 0)$, $(\varphi 1_0)$, $(\varphi 1_1)$, $(\varphi 3_\delta)$ und sei z^*-symmetrisch. Es sei

$$\int x_v{}^2 . \varphi(x)\, dx^6 < \infty .$$

K erfülle (K0), (K1) und K(t,.) sei speziell z_3-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$.
Dann gilt die Bedingung $(\Phi 1_0)$ ε-gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.
Unter den Voraussetzungen von Satz (5.3) existiert dann eine eindeutige globale Lösung Φ^0 von P^0. $\Phi^0(t,.)$ ist z^*-symmetrisch für $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es genügt wieder nachzuweisen, daß $(\Phi 1_0)$ für jedes $T > 0$ ε-gleichmäßig auf $I := [0,T]$ gilt.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\Phi = \Phi^\varepsilon$ die Lösung von P^ε auf $\mathbb{R}$. Alle Abschätzungen, die wir im Beweis verwenden, gelten für jedes $\varepsilon > 0$, auch wenn wir nicht ausdrücklich darauf hinweisen.

Wegen Lemma (8.1) gilt für jedes $t \in I$

$$(f_1(t))^2 \leq 4 . \|U(0,.)\|_\infty + 4 . \int_0^t g_W(r)\, dr$$

$$+ 4 . \int_0^t \sup_{x_s \in \mathbb{R}^N} \left(\int |x_s - y_s|^{-2} . |y_v| . \Phi(r,y)\, dy^{2N} \right) dr \qquad (8.9.1)$$

Wir bemerken zunächst, daß wegen Lemma (1.4) und Lemma (3.3)

$$\|U(0,.)\|_\infty \leq \sup_{x_s \in \mathbb{R}^3} \int |x_s - y_s|^{-1} . \varphi(y)\, dy^6 + f_W(0) =: D_1$$

$\leq J(3,1).m^{2/3}.(C_o^1)^{1/3}.C_o^2 + f_W(0) < \infty$ gilt. Ferner ist für $t \in I$

$$\int_0^t g_W(r)\, dr \leq T.g_W(T) =: D_2.$$

Aus Satz (3.14) folgt die Existenz einer Konstanten F_{ke} derart, daß für alle $t \in I$

$$\int y_v^2 . \Phi(t,y)\, dy^6 \leq F_{ke}.$$

Wegen Lemma (3.3) gilt für alle $t \in I$ und $y_s \in \mathbb{R}^3$

$$\int |y_v| . \Phi(t,y)\, dy_v^3 \leq C_1^1 . (f_1(t) + C_1^2)^4.$$

Wegen Lemma (8.4) und Lemma (8.5),(iv) gilt für $t \in I$, $x_s \in \mathbb{R}^3$

$$\int |x_s - y_s|^{-2} . |y_v| . \Phi(t,y)\, dy^6$$

$$= \int (|r+r'|^2 + |x_3 - y_3|^2)^{-1/2} . (|r-r'|^2 + |x_3 - y_3|^2)^{-1/2} . |y_v| . \Phi(t,y)\, dy^6$$

$=: f(t,x_s)$ mit $r := |(x_1,x_2)|$, $r' := |(y_1,y_2)|$.

Sei nun für festes $t \in I$ $R := (C_1^1)^{-1/2} . (f_1(t) + C_1^2)^4$.

$$f(t,x_s) = \int_{|r-r'|^2 + |x_3 - y_3|^2 \leq R^2} \ldots + \int_{|r-r'|^2 + |x_3 - y_3|^2 \geq R^2} \ldots =: J_1 + J_2$$

Aus den vorhergehenden Überlegungen und Lemma (8.8) folgt

$J_1 \leq \omega_2^2 . R . C_1^1 . (f_1(t) + C_1^2)^4$

Wir schätzen nun J_2 ab:

$$J_2 \leq R^{-1} . \int (r')^{-1} |y_v| . \Phi(t,y)\, dy^6$$

$= R^{-1} \cdot \int |(y_1,y_2)|^{-1} \cdot |y_v| \cdot \Phi(t,y)\, dy^6$

$\leq R^{-1} \cdot \delta^{-1} \cdot \int |(y_4,y_5)| \cdot |y_v| \cdot \Phi(t,y)\, dy^6$ wegen Lemma (8.7)

$\leq R^{-1} \cdot \delta^{-1} \cdot \int y_v^2 \cdot \Phi(t,y)\, dy^6 \leq R^{-1} \cdot \delta^{-1} \cdot F_{ke}$, also gilt

$f(t,x_s) \leq R \cdot \omega_2^2 \cdot C_1^1 \cdot (f_1(t) + C_1^2)^4 + R^{-1} \cdot \delta^{-1} \cdot F_{ke}$

$= (\omega_2^2 + \delta^{-1} \cdot F_{ke}) \cdot (C_1^1)^{1/2} \cdot (f_1(t) + C_1^2)^2$

Unter Verwendung der jetzt bewiesenen Abschätzungen folgt aus (8.9.1) für $t \in I$

$$(f_1(t))^2 \leq 4 \cdot (D_1 + D_2) + 4 \cdot (\omega_2^2 + \delta^{-1} F_{ke})(C_1^1)^{1/2} \cdot \int_0^t (f_1(r) + C_1^2)^2\, dr,$$

also $(f_1(t) + C_1^2)^2 \leq A + B \cdot \int_0^t (f_1(r) + C_1^2)^2\, dr$

mit $A := 2 \cdot (C_1^2)^2 + 8 \cdot (D_1 + D_2)$, $B := 8 \cdot (\omega_2^2 + \delta^{-1} F_{ke}) \cdot (C_1^1)^{1/2}$.

Wir schließen mit Lemma (1.2)

$(f_1(t) + C_1^2)^2 \leq A \cdot \exp(B \cdot t)$ für $t \in I$

A und B hängen nicht von ε ab. Mit Lemma (3.3) folgt, daß $(\Phi 1_o)$ ε-gleichmäßig auf I gilt.

Sind die Voraussetzungen von Satz (5.3) erfüllt, so ist $\Phi^o(t,.)$ z^*-symmetrisch als punktweiser Grenzwert von z^*-symmetrischen Funktionen. //

Bemerkungen: (i) Wir haben die Zylindersymmetrie an zwei entscheidenden Stellen verwendet, nämlich beim Beweis von Lemma (8.4) und beim Beweis von Lemma (8.7). Alle anderen Überlegungen sind von der Symmetrie unabhängig.

(ii) Die Voraussetzungen von Satz (8.9) und Satz (5.3) an φ sind erfüllt, wenn $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^6)$, $\varphi \geq 0$ so beschaffen ist, daß es ein stetig differenzierbares $\varphi_1 : \mathbb{R}_o^+ \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_o^+$ gibt mit

$\varphi(x) = \varphi_1(a,b,c,d,e)$

Dabei sei $a := x_1^2 + x_2^2$, $b := x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5$, $c := x_1 \cdot x_5 - x_2 \cdot x_4$, $d := x_3$, $e := x_6$ und

$\varphi_1(a,b,c,d,e) = 0$ für $|c| \leq \delta$.

(Dies ist gerade die für φ_1 formulierte Bedingung $(\varphi 3_\delta)$.)

Man rechnet sofort nach, daß a,b,c,d,e z^*-symmetrisch sind, also ist φ z^*-symmetrisch.

Es gilt $|x|^2 = a + d^2 + e^2 + a^{-1} \cdot (c^2 + b^2)$ für $a \neq 0$.

Wegen der Stetigkeit von φ_1 ist also die Beschränktheit des Trägers von φ äquivalent zur Existenz einer Konstanten C derart daß gilt

$\varphi_1(a,b,c,d,e) = 0$ für $a^2 + a \cdot (d^2 + e^2) + c^2 + b^2 \geq a \cdot C$.

Die Voraussetzungen an K sind z.B. in dem in der Stellar= dynamik betrachteten Fall $K \equiv 0$ trivialerweise erfüllt.

Es gibt also eine Fülle von konkreten Beispielen, auf die man die Theorie von §8 anwenden kann.

(iii) Die rotationssymmetrischen Lösungen von P^o beschreiben stellare Systeme mit zylindrischer Symmetrie: Die räumliche Dichte $\Phi_\rho(t,.)$ ist konstant auf den Kreislinien mit Mittel= punkt auf der x_3-Achse, die auf den Ebenen parallel zur (x_1,x_2)-Ebene liegen.

Anhang: Verzeichnis wichtiger Definitionen

(1.1) Standardbezeichnungen, x_s, x_v, $C_+(I)$

(1.4) $J(N,\alpha)$

(1.5) u^ε, e^ε, e^ε_{ij}

(1.7) $e^{\varepsilon,1}$, $e^{\varepsilon,2}$

(2.1) φ, $(\varphi 0)$, K, (K0), f_K, g_K

(2.2) Lösung von P^ε auf I, Φ^ε, E^ε_o, E^ε, f_E, g_E, lokale Lösung globale Lösung

(2.3) $X^\varepsilon(t,t_1,x)$, Φ_ρ, $|\Phi|_\rho$,

(3.1) $(\Phi 1_k)$, $f_{\Phi k}$, f_Φ

(3.2) $(\varphi 1_k)$, C^1_k, C^2_k

(3.3) f_1

(3.5) (K1), W, f_W, g_W

(3.6) U^ε_o, U^ε

(3.7) mo_i, cm_i, am_{ij}, mi, ke, pe, en, [f], M_f

(3.12) $C_{rq\lambda N}$

(3.13) C3, C4

(4.1) $(\Phi 2)$, g_Φ

(4.2) $(\varphi 2_k)$, h_k

(4.4) g_1, $\tilde{f}_1$, $\tilde{g}_1$

(4.6) E_{oij}

(5.1) $(\Phi 1_o)$ gilt ε-gleichmäßig auf I

(7.1) SO(N), S^*

(7.2) s-symmetrisch, s^*-symmetrisch, s_N-symmetrisch, $\tilde{f}$

(8.2) Z_ϑ, ZO

(8.3) z-symmetrisch, z -symmetrisch, z_3-symmetrisch, speziell z_3-symmetrisch, $\hat{f}$

(8.6) $(\varphi 3_\delta)$

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welches ε wir betrachten, lassen wir den oberen Index ε oft weg.

Literaturverzeichnis

(Nicht im Text zitierte Titel sind mit einem Asteriskus gekennzeichnet.)

Arsen'ev, A. A.

(1975a): Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations
U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 15 (1975), p. 131-143

(1975b): Existence and uniqueness of the classical solutions of Vlasov's system of equations
U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. 15 (1975), p. 252-258

(1975c)*: On the existence of statistical solutions of the Vlasov system of equations
Soviet Math. Dokl. 16 (1975), p. 216-218

(1977)*: Construction of a turbulent measure for Vlasov's system of equations
Math. USSR-Sb. 31 (1977), p. 9-27

Batt, J.

(1962): Fixpunktprobleme bei partiellen Differential=gleichungen im Zusammenhang mit dem statistischen Anfangs=wertproblem der Stellardynamik
Dissertation Aachen 1962

(1963a): Ein Existenzbeweis für die Vlasov-Gleichung der Stellardynamik bei gemittelter Dichte
Arch. Rational Mech. Anal. 13 (1963), p. 296-308

(1963b): Ein Existenzbeweis für die Boltzmann-Vlasov-Gleichung im eindimensionalen Fall
Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Jül-126-MA, 1963

(1976): Review of Chaljub-Simon (1974)
Zbl. Math. 312 (1976), p. 188 (#35024)

Batt, J. (Forts.)

(1977): Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics
J. Differential Equations 25 (1977), p. 342-364

Beesack, P. R.

(1975): Gronwall Inequalities
Carlton Mathematical Lecture Notes No. 11

Chaljub-Simon, A.

(1974): Un théorème d'existence globale pour le système de Liouville-Newton
J. Math. Pures Appl. 53 (1974), p. 39-50

Dieudonné, J.

(1970): Treatise on Analysis, vol. II
New York 1970

Hannoschöck, G. - Rautmann, R.

(1976): Schwache Lösungen und Fehlerabschätzungen für die Vlasov-Gleichung bei gemittelter Dichte
Z. Angew. Math. Mech. 56 (1976), p. T254-T256

Hardy, G. H. - Littlewood, J. E. - Pólya, G.

(1967): Inequalities
Cambridge 1967

Hartman, P.

(1964): Ordinary Differential Equations
New York 1964

Hellwig, G.

(1964): Partial Differential Equations
New York 1964

Horst, E.

(1975): Zum statistischen Anfangswertproblem der Stellardynamik
Diplomarbeit München 1975

Iordanskiĭ, S. V.

(1964): The Cauchy problem for the kinetic equation of plasma
Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 35 (1964), p. 351-363

Jeans, J. H.

(1919): Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics
Cambridge 1919

Kürschner, P.

(1977): Numerische Lösung der Vlasov-Gleichung mit finiten Elementen
Dissertation Karlsruhe 1977

Kurth, R.

(1951): Das Anfangswertproblem der Stellardynamik
Z. Astrophys. 30 (1951), p. 213-229

(1955a): General theory of spherical self-gravitating star systems in a steady state
Astronom. Nachr. 282 (1955), p. 97-106

(1955b)*: Stellar orbits in globular clusters
Astronom. Nachr. 282 (1955), p. 241-246

(1957): Introduction to the Mechanics of Stellar Systems
London 1957

(1978): A global particular solution to the initial-value problem of stellar dynamics
preprint 1978

Neunzert, H.

(1965): Über ein Anfangswertproblem für die stationäre Boltzmann-Vlasov-Gleichung
Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Jül-297-MA, 1965

(1968)*: Untersuchungen zur Boltzmann-Gleichung
Z. Angew. Math. Mech. 48 (1968), p. T222-T223

(1975): Neuere qualitative und numerische Methoden in der Plasmaphysik
Vorlesungsmanuskript Paderborn 1975

Neunzert, H. - Wick, J.

(1972)*: Theoretische und numerische Ergebnisse zur nichtlinearen Vlasov-Gleichung
in: Lecture Notes in Mathematics No. 267, Berlin-Heidelberg-New York 1972

Ogorodnikov, K. F.

(1965)*: Dynamics of Stellar Systems
Oxford 1965

du Plessis, N.

(1955): Some theorems about the Riesz fractional integral
Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), p. 124-134

Rautmann, R.

(1968): Zur globalen Lösbarkeit der Vlasovschen Gleichung für Medien geringer Dichte mit relativistischer Korrektur
Z. Angew. Math. Mech. 48 (1968), p. T276-T279

(1972)*: Über Quasi-Lipschitzbedingungen für die Gradienten Newtonscher Potentiale
Z. Angew. Math. Mech. 52 (1972), p. T101-T104

(1974)*: Lösung einer Anfangswertaufgabe für substantielle Differentialgleichungen
in: Lecture Notes in Mathematics No. 395, Berlin-Heidelberg-New York 1974

Strampp, W.

(1978a): Special symmetric solutions of Vlasov's equation
preprint 1978

(1978b)*: On Vlasov's equation with mollified density for an electron gas in an exterior magnetic field
preprint 1978

Scherrer, W.

(1950)*: Über die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen
Comment Math. Helv. 24 (1950), p. 46-63

Schürer, M.

(1942)*: Beitrag zur Dynamik der Sternsysteme
Astronom. Nachr. 273 (1942), p. 230-242

Ukai, S. - Okabe, T.

(1978): On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation
Osaka J. Math. 15 (1978), p. 245-261

Vlasov, A. A.

(1961): Many-Particle Theory and Its Application to Plasma
New York 1961

Weibel, E. S.

(1967): L'équation de Vlasov dans la théorie spéciale de la relativité
Plasma Phys. 9 (1967), p. 665-670

Wick, J.

(1974): Zur Anwendung der Approximation durch endliche Punktmengen auf die Lösung von Integro-Differential=gleichungen
Berichte der Kernforschungsanlage Jülich Jül-1124-MA, 1974

Wollman, S.

(1977): Classical solutions to the Vlasov-Poisson system of equations
University of New Mexico, Technical Report No. 329

(1978): Global-in-time solutions to the two-dimensional Vlasov-Poisson system
preprint 1978

Lebenslauf

29.5.1951 geboren in Laubach/Oberhessen

1957-1970 Volksschule in Lardenbach, Gymnasium in Laubach

2.6.1970 Abitur

1970-1971 Mathematikstudium U Marburg

1971-1978 Mathematikstudium U München

25.2.1976 Diplomprüfung

1.9.1976 Beginn der Tätigkeit als VWA am Mathematischen Institut der U München

Druck: D. Gräbner, 8602 Altendorf - Tel. 09545/8791